Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth Wintersemester 08/09

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 16.01.2009)

Aufgabe 53 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$:

a) $(3,4)$ b) $(4,-3)$ c) $(-2,1)$ d) $(-1,-2)$

Geben Sie die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) an:

e) $(\pi,0,0)$ f) $(0,1,0)$ g) $(5,0,5)$

Aufgabe 54 (10 Punkte)

Seien $\alpha, b \in \mathbb{R}$ beliebig und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$A = b\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Polardarstellung von $A\vec{e}_1$ und $A\vec{e}_2$, wobei $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ ist. Was bewirkt also die Anwendung von A auf $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$? Schließen Sie daraus auf die Wirkung von A auf beliebige Vektoren.

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) AA^T, b) A^TA, c) AA^TB, d) A^TAB,
e) B^TAA^T, f) A^2, g) A^TAA^TA.

Aufgabe 56 (10 Punkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix gemäß

$$A^0 = I\,, \quad A^1 = A\,, \quad A^2 = AA\,, \quad A^3 = AAA\,, \; \ldots$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Weiter definieren wir die Matrixexponentialfunktion durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$. Berechnen Sie $\exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$