

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 23.01.2009)

Aufgabe 57

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie damit die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, $X \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ und $Y \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ von

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad AX = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad AY = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 58

(10 Punkte)

Seien $\alpha, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert durch

$$A = b \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $B_n := A^n$, $\det(B_n)$ und $(B_n)^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 59

(10 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^8$$

Aufgabe 60

(10 Punkte)

Zeigen Sie: $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ mit

$$\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

und dem Matrixprodukt \cdot ist für $n \geq 2$ eine nicht-abelsche Gruppe.

Aufgabe 61

(10 Punkte)

Seien z_1, z_2, z_3 die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = -8, \quad z_2 = 3i, \quad z_3 = -1 + i.$$

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase von:

$$\text{a) } z_1 \quad \text{b) } z_2 \quad \text{c) } z_3 \quad \text{d) } z_1 \cdot z_3 \quad \text{e) } z_2 \cdot z_3 \quad \text{f) } z_2 / z_3.$$