Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth Wintersemester 08/09

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 6.2.2009

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 106 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\frac{n(n+1)}{2}$ ist.

Aufgabe 2 (4+4+4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n} x^{3\nu}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{n-\mu+1}$, c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k}$.

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sin(n^5)}{(n-1)^3}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n(2-1/n)$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n^2 - \sqrt{n^4-n^2}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n+1}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)^2}{2x^9 - x^6}$

Aufgabe 4 (4+4+4 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen f, g und h,

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}, \qquad g(x) = \sin(\arccos(x)), \qquad h(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 5 (4+4+4+4 Punkte)
i) Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\displaystyle\frac{3}{8+x^3}$ b) $\displaystyle\frac{1+x}{(1-x)}$ c) $\displaystyle\frac{\cos(x) - \mathrm{e}^{-\sqrt{a}\,x^2}}{x^2}$ (stetig fortgesetzt bei $x=0$)

ii) Bestimmen Sie für welche $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Funktion aus c) ein Minimum bzw. ein Maximum in Null hat.

Aufgabe 6 (4+4+5+2 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{1-x^3}{x^2-1}$, d.h.:

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f. Wo ist f stetig fortsetzbar und wie?
b) Bestimmen Sie alle (senkrechten, waagerechten und schiefen) Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie alle Hoch- und Tiefpunkte.
d) Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x}$, der Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 4$ sowie der y-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Lösung $X \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ von $AX = Y$, also $A^{-1}Y$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (4+2+4 Punkte)

a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$ die Determinante von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i}z & 0 \\ 0 & \mathrm{i}+1 & z \\ \mathrm{i} & z & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix}.$$

b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist A invertierbar?
c) Orthonormieren Sie für $z = 1$ die Spalten von A bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^3$, also $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := \overline{v_1}w_1 + \overline{v_2}w_2 + \overline{v_3}w_3$.

Aufgabe 10 (3+2+3+3 Punkte)

Zeigen Sie: $(M, \cdot)$ mit

$$M = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det A = 1 \right\}$$

und dem Matrixprodukt $\cdot$ ist eine nicht-abelsche Gruppe, d.h. zeigen Sie:

a) $A, B \in M \implies A \cdot B \in M$
b) M enthält ein neutrales Element
c) $A \in M \implies A^{-1} \in M$
d) Es gibt $A, B \in M$ mit $A \cdot B \neq B \cdot A$