Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth Wintersemester 08/09

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 16.04.2009

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 102 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Summe der ersten n geraden natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)$ ist.

Aufgabe 2 (4+4+4 Punkte)
Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{3n} x^{2\nu}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{12}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n} \frac{1}{\nu}$, c) $\displaystyle(x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k\, y^{n-k}$.

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3 Punkte)
Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)\left(1+\frac{2}{n}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^3 \arctan(n^2)}{n^5}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^{2n-1}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^6-n^3}-n^3\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2-2\cos x - x^2)^2}{2x^9 - x^8}$

Hinweis: $|\arctan x| \le \frac{\pi}{2}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (10+4 Punkte)

a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen g und h mit

$$g(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2\log x} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \int_{-x^4}^{\pi} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \ , \qquad \text{sowie} \qquad \lim_{x\to 0} g'(x).$$

b) Bestimmen Sie die Ableitung von $g := f^2 \log f$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine beliebige differenzierbare Funktion ist.

Hinweis: Das Ergebnis enthält f'.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^4 = -4$. Markieren Sie diese z in einer Skizze der komplexen Ebene.

HINWEIS: Die Polardarstellung $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, $r \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$, ist hilfreich.

Aufgabe 6 (4+4+4 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um x_0, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\dfrac{3}{4x^5 - 2}\,, \quad x_0 = 0$ b) $\dfrac{1-x}{1+x}\,, \quad x_0 = 0$ c) $\dfrac{1}{1+x}\,, \quad x_0 = 3$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_a, definiert durch

$$f_a(x) = \frac{\mathrm{e}^{-ax^2}}{1-x^2}\,,$$

bei Null eine Maximalstelle, für welche eine Minimalstelle?

HINWEIS: Bestimmen Sie die ersten Terme der Taylorentwicklung um Null – Sie müssen dazu nicht ableiten!

Aufgabe 8 (4+4+5+2 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \dfrac{(2x-1)^2\,(x-1)}{x^2-x}$, d.h.:

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f. Wo ist f stetig fortsetzbar und wie?
b) Bestimmen Sie alle (senkrechten, waagerechten und schiefen) Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie alle Hoch- und Tiefpunkte.
d) Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f : x \mapsto x^2$, der Tangente an den Graphen an der Stelle $x = 3$ sowie der x-Achse eingeschlossen wird.

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Berechnen Sie die Lösung $X \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ von $AX = Y$, also $A^{-1}Y$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11 (5+4 Punkte)

Für welche $u, v \in \mathbb{R}$ sind die folgenden drei Vektoren linear unabhängig?

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ v \\ u \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie außerdem für $u = 1$ und $v = 3$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ (bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^3$).