Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2008/2009
15.10.2008

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Bestimmung von $\sqrt{2}$ aus rekursiven Verfahren

Die Umkehrung der Wechselwegnahme am Quadrat liefert für die Seiten a_n und die Diagonalen d_n die Relationen

$$d_{n+1} = 2a_n + d_n,\ a_{n+1} = a_n + d_n.$$

Wir betrachten nun diese Rekursionsvorschrift mit den Startwerten $d_0 = a_0 = 1$. Zeigen Sie

$$\left| \frac{d_n}{a_n} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{a_n^2\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2^{2n}\sqrt{2}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Was bedeutet das für die Güte der Approximation? Hinweise: Berechnen Sie $(d_n - a_n\sqrt{2})(d_n + a_n\sqrt{2})$; verwenden Sie die üblichen Regeln für Ungleichungen, wie von der Schule gewohnt.

Aufgabe 2: Induktionsbeweis

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3: Falscher Induktionsbeweis

Wo genau liegt der Fehler in folgendem "Induktionsbeweis"?

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2 \cdot n = 0$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $2 \cdot n = 2 \cdot 0 = 0$.
Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für alle $k \leq n$, also $2 \cdot k = 0\ \forall k \leq n$.
Induktionsschritt: Für $k = n + 1$ gilt $k = a + b$ für zwei natürliche Zahlen $a, b \leq n$. Also ist $2 \cdot (n + 1) = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 0 + 0 = 0$.

Aufgabe 4: Definition der natürlichen Zahlen

Wir haben in der Vorlesung $\mathbb{N}$ als die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ definiert. In dieser Aufgabe zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ tatsächlich eine eindeutige kleinste induktive Teilmenge besitzt und $\mathbb{N}$ somit wohldefiniert ist.
Sei dazu $\mathcal{M}$ die Menge aller induktiven Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

i) $\mathcal{M}$ nicht leer ist,

ii) die Schnittmenge aller induktiven Teilmengen $N := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$ wieder induktiv und somit nicht leer ist,

iii) N die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, also $N \subseteq M$ für jedes $M \in \mathcal{M}$,

iv) N eindeutig bestimmt ist, also, dass falls N' induktiv ist und ebenfalls $N' \subseteq M$ für alle $M \in \mathcal{M}$ erfüllt, schon $N' = N$ gilt. Hinweis: Zwei Mengen A, B sind gleich, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 20.10.2008, in der Vorlesung.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre