Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2008/2009
17.12.2008

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 10

Aufgabe 44: Ableiten, Ableiten, Ableiten (12 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe von Produkt-, Quotienten- und Kettenregel sowie der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion ab.

i) $f_1(x) := a^x$ für $a > 0$,

ii) $f_2(x) := x^a$ für $x > 0$,

iii) $f_3(x) := x^x$ für $x > 0$,

iv) $f_4(x) := \frac{\sin(x)\, e^{1/\sqrt{1+x^2}}}{2+\sin(x)}$,

v) $f_5(x) := \arcsin x,\ x \in (-1, 1)$,

vi) $f_6(x) := \arccos x,\ x \in (-1, 1)$,

vii) $f_7(x) := \tan x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

viii) $f_8(x) := \arctan x,\ x \in \mathbb{R}$,

ix) $f_9 := h \cdot f \cdot g$,

x) $f_{10} := h \circ f \circ g$,

xi) $f_{11} := h \circ (1/g)$,

xii) $f_{12} := \ln(h)$,

wobei $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktionen sind.

Aufgabe 45: Differenzierbarkeit

i) Skizzieren Sie die Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \ := \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) \ := \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Sind f und g stetig bei Null? Sind sie dort auch differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Es gilt:

f ist monoton steigend bzw. fallend $\Leftrightarrow f' \geq 0$ bzw. $f' \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Zeigen Sie die Richtung "$\Rightarrow$" (andere Richtung kommt in der Vorlesung). Ersetzt man in obiger Aussage Monotonie durch strenge Monotonie und "$\geq$" bzw. "$\leq$" durch "$>$" bzw. "$<$"gilt nur noch die Richtung "$\Leftarrow$". Finden Sie als Gegenbeispiel eine Funktion, die strikt monoton steigend ist, jedoch nicht $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ erfüllt.

Aufgabe 46: Lipschitz-Stetigkeit

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$. Dann heißt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig*, falls

$$\exists\, L > 0 \ \ \forall\, x, y \in \Omega : \quad |f(x) - f(y)| \ < \ L\,|x - y|.$$

Zeigen Sie:

i) f Lipschitz-stetig $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow f$ stetig

ii) Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht. Finden Sie jeweils Gegenbeispiele (mit Begründung).

Aufgabe 47:

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, n mal differenzierbare Funktionen ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei $f^{(0)} := f$. Hinweis: Ähnlicher Beweis wie beim binomischen Lehrsatz.

***Wir wünschen allen schöne Festtage und einen guten Rutsch ins neue Jahr*!!!**

Die Klausur findet am Samstag, den 07.02.2009, von 10.00 bis 13.00 Uhr im Hörsaal N5 statt.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Mittwoch, 07.01.2009, in der Vorlesung.

Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 13.00-15.00 Uhr im 8D09.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre