

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I

Übungsblatt 12

Aufgabe 53: Bestimmen Sie ein Polynom $P(x)$, so dass für $x \in [-1, 1]$

$$|\exp(x) - P(x)| < 10^{-2}.$$

Aufgabe 54: Bestimmen Sie die Taylorreihen von f_i um x_0 . Diskutieren Sie das Konvergenzverhalten der Taylorreihen. Skizzieren Sie für ein f_i die Funktion selber sowie das Taylorpolynom für verschiedene Ordnungen n .

i) $f_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = -1,$

ii) $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x_0 = 0,$

iii) $f_3(x) = \arctan x, \quad x_0 = 0,$

iv) $f_4(x) = \sin x, \quad x_0 = 0.$

Tipps: Sie brauchen bei i) und ii) keine allgemeine Form für $f_1^{(n)}$ bzw. $f_2^{(n)}$ zu finden. Für iii) kann ii) hilfreich sein!

Aufgabe 55:

i) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig. Sei weiterhin (x_n) eine Folge in $[a, b]$ mit $x_n \rightarrow x$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x).$$

ii) Finden Sie eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, eine Folge stetiger Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Folge (x_n) in $[a, b]$ mit $x_n \rightarrow x$, so dass $f_n \rightarrow f$ punktweise, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \neq f(x).$$

Aufgabe 56: Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Was ist die Bedeutung der Ausdrücke in i) und ii)?

i) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{3(x-a)}$ für $a \geq 0$,

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right),$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x + x^3/3! - x^5/5!}{x^5},$

iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{1/x^2}}{1 - e^{1/x}}.$

Die Klausur findet am Samstag, den 07.02.2009, von 10.00 bis 13.00 Uhr im Hörsaal N5 statt.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 19.01.2009, in der Vorlesung.

Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 13.00-15.00 Uhr im 8D09.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre