

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I
Übungsblatt 14

Aufgabe 61: Sei $a < b < c$ und $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: f ist genau dann integrierbar, wenn sowohl $f|_{[a,b]}$ als auch $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind und es gilt dann:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Aufgabe 62: Partielle Integration

i) Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen.

(a) $\int^x x^2 \sin(x) dx,$

(b) $\int^x \sin^2(x) dx.$

ii) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi \cdot \delta_{nm}$, wobei $\delta_{nm} = 1$ falls $n = m$ und $\delta_{nm} = 0$ sonst.

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx = 0.$

Aufgabe 63: Substitution (8 Punkte)

i) Berechnen Sie die Stammfunktionen von f_i für $i = 1, 2, 3$ durch Integration, wobei

(a) $f_1(x) = x e^{-x^2},$

(b) $f_2(x) = x^3 / \sqrt{1+x^4},$

(c) $f_3(x) = \sqrt{1+x^2}.$

ii) Berechnen Sie das Integral $\int_0^a f_i(x) dx$ für $i = 4, 5$, wobei

(a) $f_4(x) = \sqrt{x}/(1+x),$

(b) $f_5(x) = \sqrt{x}/(1+\sqrt{x}).$

Wie verhalten sich die Integrale für große a ?

Hinweis: Manchmal kann die Substitution $x = \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ sinnvoll sein. Beachten Sie, dass $(\sinh z)' = \cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ und $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

Aufgabe 64: Ableiten von Integralen

Seien $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Bestimmen Sie die Ableitung von $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(y) dy.$$

Aufgabe 65: Uneigentliche Integrale

Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x) dx$ existiere und sei endlich.

i) Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass nicht unbedingt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ gelten muss.

ii) Sei nun f zusätzlich stetig differenzierbar und $\int_0^\infty f'(x) dx$ existiere und sei endlich. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Die Klausur findet am Samstag, den 07.02.2009, von 10.00 bis 13.00 Uhr im Hörsaal N5 statt.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 02.02.2009, in der Vorlesung.

Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 13.00-15.00 Uhr im 8D09.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre