Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2008/2009
22.10.2008

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 2

Aufgabe 5: Bernoullische Ungleichung

Es sei $x > -1$. Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \text{ (mit } > \text{ für } n > 1 \text{ und } x \neq 0)$$

gilt. Wo wird die Voraussetzung benötigt?

Hinweis: Zeigen Sie dies, ohne den Binomischen Lehrsatz zu verwenden.

Aufgabe 6: Geometrisches und arithmetrisches Mittel

a) Sei $a \geq 0$ und $b \geq 0$. Man zeige

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \tag{1}$$

("Das geometrische Mittel ist kleiner-gleich dem arithmetischen.") und dass Gleichheit genau dann gilt, wenn $a = b$.

b) Man überlege sich, dass (1) äquivalent ist zu folgender Aussage: unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

Aufgabe 7: Beweisen Sie die folgenden Aussagen ausgehend von den Körperaxiomen.

i) Die Gleichung $a \cdot x = b$ wird duch $x = b \cdot a^{-1}$ gelöst und diese Lösung ist eindeutig.

ii) Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig bestimmt.

iii) Hat ein Körper mindestens zwei Elemente, so gilt $1 \neq 0$.

iv) Zeigen Sie, dass in einem angeordneten Körper $a^2 > 0 \ \forall a \neq 0$. Folgern Sie daraus $1 > 0$.

Aufgabe 8: Komplexe Zahlen

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit den Verknüpfungen $+ : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)+(x',y') := (x+x', y+y')$ und $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)\cdot(x',y') := (xx' - yy', xy' + x'y)$ ein Körper ist. Dieser Körper heißt der Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass man $\mathbb{C}$ nicht anordnen kann.

Aufgabe 9: Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgenden Mengen Körper sind, und wenn ja, ob sie angeordnet sind.

i) $\mathbb{N}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

ii) $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

iii) $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gegeben durch die Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 27.10.2008, in der Vorlesung.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre