Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2008/2009
27.10.2008

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 3

Aufgabe 10: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die geometrische Summenformel:
Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Was ergibt sich für $n \to \infty$?

Aufgabe 11: Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage, dass (a_n) eine Nullfolge ist für

i) $a_n = \frac{n+10^6}{n^2+1}$,

ii) $a_n = n^m\, q^n$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $|q| < 1$,

iii) $a_n = n!\, q^n$ mit $|q| < 1$,

iv) $a_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

Aufgabe 12: Definition der Folgenkonvergenz

a) In der Vorlesung wurde definiert:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |x_n - x| < \varepsilon.$$

Welche der folgenden Aussagen liefert eine äquivalente Definition der Folgenkonvergenz?

i) $\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |x_n - x| \leq \varepsilon$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad |x_n - x| \leq \varepsilon$

b) Formulieren Sie mit Quantoren die Aussage, dass eine Folge divergiert.

Aufgabe 13: Konvergente Folgen

i) Zeigen Sie mit Hilfe des Monotoniekriteriums, dass (x_n) definiert durch $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ und $x_0 > 0$ beliebig für $a > 0$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ exisiert. Folgern Sie dann, dass $x^2 = a$ gelten muss!

ii) Sei (x_n) eine Nullfolge und (y_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

Aufgabe 14: b-adische Entwicklung

i) Sei $0, x_1 x_2 x_3 ...$ die b-adische Entwicklung von $x \in (0,1)$, also

$$x_1 = \max\left\{k \in \{0,1,...,b-1\} \,\middle|\, k\, b^{-1} \leq x\right\},$$
$$x_{n+1} = \max\left\{k \in \{0,1,...,b-1\} \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j\, b^{-j} + k\, b^{-j-1} \leq x\right\}.$$

Zeigen Sie mit dem Cauchy-Kriterium, dass die Folge (a_n) gegeben durch $a_n := \sum_{j=1}^{n} x_j\, b^{-j}$ konvergiert.

ii) Bestimmen Sie die Dualentwicklung ($b = 2$) von $x = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie dazu zunächst die ersten Stellen von Hand und beweisen Sie dann die sich ergebende Vermutung.

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 10!

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 03.11.2008, in der Vorlesung.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre