Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2008/2009
03.11.2008

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 4

Aufgabe 15: Beschränkte Mengen
Besitzen die folgenden Mengen Minimum, Maximum, Infimum, Supremum? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls und begründen Sie Ihre Antwort!

i) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 7\}$,

ii) $M_2 := \{(-1)^n(1 - 1/n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,

iii) $M_3 := \{1/n + 1/m \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$.

Hinweis: Ein Element von A, welches auch obere bzw. untere Schranke von A ist, nennt man Maximum bzw. Minimum.

Aufgabe 16: Konvergente Folgen
Setzen Sie die Aussagen $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$, $\lim_{n\to\infty}(x_n)^k = x^k$, $\lim_{n\to\infty} |x_n|^k = |x|^k$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{|x_n|} = \sqrt[k]{|x|}$ für $k \in \mathbb{N}$ in Beziehung zueinander. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Zeigen Sie durch direktes Nachrechnen, dass

$$a^n - b^n \;=\; (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\, b^{k-1}.$$

Aufgabe 17: Konvergente Folgen
Sei (x_n) eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert x. Es gelte $x_n \geq b$ für ein $b \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ Zeigen Sie, dass auch $x \geq b$. Gilt die entsprechende Aussage auch, wenn man das "$\geq$" in $x_n \geq b$ bzw. $x \geq b$ durch $>, \leq, <$ ersetzt?

Aufgabe 18: Durchschnitte
Der Durchschnitt einer Folge von Teilmengen $I_n \subset \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist definiert durch $\bigcap_n I_n := \{x \in \mathbb{R} : x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$. Man bestimme folgende Durchschnitte:

$$\bigcap_n [-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]$$

$$\bigcap_n (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$$

$$\bigcap_n [-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n})$$

$$\bigcap_n (-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]$$

$$\bigcap_n (-\infty, +\frac{1}{n})$$

Aufgabe 19: Konvergente Folgen
Man beweise oder widerlege: Seien (x_n), (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$, $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $(x_n + y_n)$ konvergent $\Longrightarrow$ (x_n) oder (y_n) sind konvergent.

(b) $(x_n \cdot y_n)$ konvergent $\Longrightarrow$ (x_n) oder (y_n) sind konvergent.

(c) $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ konvergent $\Longrightarrow$ (x_n) oder (y_n) sind konvergent.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 10.11.2008, in der Vorlesung.

Ab morgen Dienstag findet ein Repetitorium zur Vorlesung von 12.30-14 Uhr im N8 statt.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre