Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2008/2009
10.11.2008

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 5

Aufgabe 20: Konvergenz von Reihen

a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass die Reihe auch im gewöhnlichen Sinn konvergiert.

b) Zeigen Sie das Majoranten- bzw. Minorantenkriterium für Reihen aus der Vorlesung.

Aufgabe 21: Konvergente Reihen?
Für welche der Folgen (x_n) und welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

$$\text{a) } x_n = \binom{5n}{4n}^{-1} \quad \text{b) } x_n = \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3} \quad \text{c) } x_n = (\alpha + 1/n)^n.$$

Aufgabe 22: Turm aus Bauklötzen
Betrachten Sie einen Turm aus $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, Bauklötzen der Länge l. Es soll durch Verschieben der Klötze ein möglichst großer Überhang erreicht werden. Dazu wird der erste (der oberste) Klotz solange nach rechts entlang seiner Länge verschoben, bis sich der Schwerpunkt über der rechten Kante des darunterliegenden Klotzes befindet, d.h. um den Betrag $\frac{l}{2}$. Im n-ten Schritt verschiebt man den n-ten Klotz zusammen mit allen darüberliegenden soweit nach rechts, bis sich der Schwerpunkt der ersten n Klötze über der rechten Kante des $(n+1)$-ten Klotzes befindet. Wie groß ist der erreichte Überhang nach n Schritten? Was ergibt sich im Limes $n \to \infty$?

Aufgabe 23: Injektivität und Surjektivität

i) Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, welche surjektiv, welche beides?
   (a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$,
   (b) $f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$,
   (c) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto 1/n$.

ii) Geben Sie eine Bijektion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ an und skizzieren Sie den Graphen!

iii) Seien $g : M \to N$, $f : N \to S$ Funktionen. Die Komposition von g und f ist definiert durch

$$f \circ g : M \to S,\ x \mapsto f\big(g(x)\big).$$

Sei $f \circ g$ bijektiv. Welche Eigenschaften folgen daraus für f und g (mit Begründung)?
   (a) f injektiv, ii) f surjektiv, iii) g injektiv, iv) g surjektiv.

Aufgabe 24: Mächtigkeiten
Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Sei M abzählbar. Dann ist $M \times M$ abzählbar.

ii) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer abzählbar-unendlichen Menge M ist überabzählbar, wobei die Potenzmenge einer Menge M die Menge aller Teilmengen von M bezeichnet. *Tipp:* Definieren Sie eine Abbildung, die jedem Element P der Potenzmenge (P ist also ein Teilmenge von M!) eine Folge von Nullen und Einsen zuordnet, aus der hervorgeht, welche Elemente von M in P enthalten sind. Argumentieren Sie dann analog zur Vorlesung!

Aufgabe 25: Cantor Menge (Extra-Aufgabe, keine Punkte)
Man betrachte das Intervall $I_0 = [0, 1)$. Um I_1 zu erhalten, entfernt man von I_0 das mittlere Drittel, wobei der rechte Randpunkt vom entfernten Drittel bestehen bleibt, d.h. $I_1 = [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1)$. In n-ten Schritt entfernt man von jedem Teilintervall von I_{n-1} das mittlere Drittel (rechte Randpunkte bleiben bestehen) und erhält I_n.

i) Definiert man als die Länge $\lambda(A)$ eines Intervalls $A = [a, b)$ gleich $b - a$, ist $\lambda(I_0) = 1$. Setzt man für abzählbar viele disjunkte Intervalle A_n, $n \in N$ mit $N \subseteq \mathbb{N}_0$,

$$\lambda\left(\bigcup_{n\in N} A_n\right) = \sum_{n\in N} \lambda(A_n),$$

erhält man $\lambda(I_1) = \frac{2}{3}$. Was erhält man für $\lambda(I_n)$? Wie verhält sich dieser Ausdruck für $n \to \infty$.

ii) Man betrachte die Menge

$$C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} I_n.$$

Zeigen Sie, dass C dennoch überabzählbar ist. Hinweis: Versuchen Sie eine b-adische Darstellung der Zahlen in C zu finden mit einer geeigneten Basis b.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 17.11.2008, in der Vorlesung.

Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 12.30-14 Uhr im N8.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre