Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen



# Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 6

**Aufgabe 26: Die Exponentialfunktion**

i) Folgern Sie aus dem Exponentialgesetz, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) > 0 \text{ und } \exp(-x) = 1/\exp(x).$$

ii) Die Eulersche Zahl $e$ ist definiert durch $e := \exp(1)$. Zeigen Sie, dass

$$e^{\frac{p}{q}} = \exp\left(\frac{p}{q}\right), \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

**Aufgabe 27: Der Logarithmus**

i) Zeigen Sie unter Verwendung von Satz 8.1 aus der Vorlesung, dass für $x, y \in (0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y);\ \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y);\ \ln(x^n) = n\ln(x).$$

ii) Zeigen Sie ebenfalls unter Verwendung von Satz 8.1, dass für $x > -1$ und $x \neq 0$ gilt

$$\ln(1 + x) < x.$$

**Aufgabe 28: Exponentialfunktion mit beliebiger Basis**

i) Zeigen Sie, dass für $x, y \in (0, \infty)$ und $r, s \in \mathbb{R}$ gilt

$$(xy)^r = x^r y^r;\ (x^r)^s = x^{rs};\ x^{r+s} = x^r x^s.$$

ii) Zeigen Sie: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = 1$; $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$.

**Aufgabe 29: Stetige Funktionen und der Zwischenwertsatz** (6 Punkte)

i) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass
   (a) das Produkt $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ stetig ist,
   (b) die Verknüpfung $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$ stetig ist.

ii) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) $f$ ist beschränkt.
   (b) $f$ nimmt Infimum und Supremum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) = \inf_{[a,b]} f := \inf\{f(x) | x \in [a, b]\} \quad \text{und} \quad f(x_{\max}) = \sup_{[a,b]} f.$$

iii) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
   (a) Seien $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(0) > g(0)$ und $f(1) < g(1)$. Dann gibt es ein $x \in (0, 1)$ mit $f(x) = g(x)$.
   (b) Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig. Dann hat $f$ einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$.

**Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!**

**Abgabe:** Montag, 24.11.2008, in der Vorlesung.

**Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 12.30-14 Uhr im N8.**

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre