Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2008/2009
24.11.2008

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 7

Aufgabe 30: Stetige Funktionen?

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{|x|}) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Ist f stetig? Skizzieren Sie f.

ii) Sei $[x] := \max\{n \in \mathbb{N}_0 | n \leq x\}$. D.h. $[x]$ ist die größte natürliche Zahl kleiner oder gleich x. Sei $s : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $s(x) := |x - [x] - \frac{1}{2}|$ und

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = s\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ist f stetig oder sogar gleichmäßig stetig? Skizzieren Sie f und s.

iii) Kann man f aus ii) in 0 stetig fortsetzen, d.h. gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} s\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \in (0, 1], \\ c & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

stetig auf $[0, 1]$ ist? Ändert sich die Situation, wenn man $f(x) = xs\left(\frac{1}{x}\right)$ in 0 stetig fortsetzen will?

Aufgabe 31: Verneinen Sie folgende Aussagen:

(a) Zu jeder Frau gibt es einen Mann, mit dem sie nicht glücklich werden kann.

(b) Es gibt keinen noch so großen Unsinn, der nicht von irgend jemanden behauptet würde.

(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, so dass $\forall x$ mit $|x - p| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Aufgabe 32: Offene und abgeschlossene Mengen

i) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind offen, abgeschlossen bzw. kompakt? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z \in (0, 1), \mathrm{Im} z = 0\};\ \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z \in [0, 1], \mathrm{Im} z = 0\};\ H_+ := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}.$$

ii) Sei $\{O_n \subset \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von offenen sowie $\{A_n \subset \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Mengen sind stets offen, welche abgeschlossen, welche im Allgemeinen nichts von beidem?

(a) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$,

(b) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$,

(c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$,

(d) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Tipp: Überlegen Sie sich die Antwort an Hand von Intervallen und prüfen Sie dann, dass dies auch im Allgemeinen so ist.

Aufgabe 33: Abschluss von Mengen

i) Zeigen Sie, dass die rationalen Zahlen weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$ sind und $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $\omega \in \overline{\Omega} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, (z_n)$ in Ω : $\lim_{n \to \infty} z_n = \omega$.

(b) Ω ist abgeschlossen $\quad \Longleftrightarrow \quad \Omega = \overline{\Omega} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, (z_n)$ in Ω mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$: $z_0 \in \Omega$.

Aufgabe 34: Angeordneter Körper ohne archimedische Eigenschaft (4 Extrapunkte)
Man betrachte die Menge K der rationalen Funktionen, d.h. für ein $k \in K$ gilt:

$$k = \frac{P}{Q},$$

wobei P und Q Polynome sind mit $\text{Grad}(P) = m$, $\text{Grad}(Q) = n$ $(m, n \in \mathbb{N}_0)$ und $Q \neq 0$. Dabei wird die Konvention verwendet, dass zwei Elemente als identisch angesehen werden, wenn sie als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ nicht zu unterscheiden sind (bis auf eventuell vorhandene Definitionslücken). Z.B. sind $\frac{1-x^2}{1+x}$ und $\frac{1-x}{1}$ identisch. Man definiert die Verknüpfungen $\cdot$ (Multiplikation) und $+$ (Addition) in offensichtlicher Weise, d.h.

$$k \cdot k' = \frac{PP'}{QQ'}$$

und (Hauptnenner bilden)

$$k + k' = \frac{PQ' + P'Q}{QQ'}$$

Man kann zeigen, dass $(K, \cdot, +)$ ein Körper ist.

i) Geben Sie das Inverse und neutrale Element bzgl. $\cdot$ und $+$ an.

ii) Sei $P = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ und $Q = b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n$. Ein Element $k \in K$ ist positiv, falls $a_m b_n > 0$. Zeigen Sie, dass in K die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

iii) Wie in $\mathbb{R}$ definiert man auch hier die Menge $\mathbb{N}_K$ der "natürlichen Zahlen" als die kleinste induktive Teilmenge von K. Geben Sie $\mathbb{N}_K$ an.

iv) Zeigen Sie, dass die archimedische Eigenschaft nicht gilt. Hinweis: Betrachten Sie $\frac{x}{1} - k$, $k \in \mathbb{N}_K$.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 01.12.2008, in der Vorlesung.

Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 12.30-14 Uhr im N8.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre