

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER I
Übungsblatt 8

Aufgabe 35: Konvergenz von Reihen

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{C} und die Partialsummenfolge $s_m = \sum_{n=1}^m |a_n|$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sei beschränkt. Zeigen Sie:

- i) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.
- ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. (Also sind absolut konvergente Reihen auch konvergent.)
- iii) Sei (b_n) eine Folge in \mathbb{C} mit $|b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Typ: Verwenden Sie für a) das Monotoniekriterium für Folgen und für b) das Cauchy-Kriterium für Folgen sowie a)!

Aufgabe 36: Zur Definition von $\exp(z)$

Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Hinweis: Binomischer Lehrsatz.

Aufgabe 37: Limes superior und limes inferior

- i) Bestimmen Sie \liminf und \limsup der Folgen
 - (a) $x_n = (-1)^n$,
 - (b) $y_n = \left(1 + (-1)^n/n\right)^n$.

ii) Sei (x_n) eine beschränkte Folge in \mathbb{R} und

$$x^* := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad x_* := \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Zeigen Sie: Die Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn $x^* = x_*$ und in diesem Fall gilt

$$\lim x_n = x^* = x_*.$$

Aufgabe 38: Funktionenfolgen

- i) Betrachten Sie die Funktionenfolgen $(f_n), (g_n)$ mit $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und
 - (a) $f_n(x) := \sqrt[n]{x}$,
 - (b) $g_n(x) := \frac{1}{n}x^n$.

Beweisen oder widerlegen Sie die gleichmäßige Konvergenz der Folgen und geben Sie die Grenzfunktion an.

ii) Zeigen Sie, dass die Produktfolge $(f_n \cdot g_n)$ zweier gleichmäßig konvergenter Folgen $(f_n), (g_n)$ von Funktionen $f_n, g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ wieder gleichmäßig konvergent ist, falls f_n, g_n für alle n stetig sind. Finden Sie außerdem ein Beispiel, das zeigt, dass dies für unstetige Funktionen nicht so ist.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 08.12.2008, in der Vorlesung.

Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 13.00-14.00 Uhr im N8.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre