Dr. T. Moser
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2008/2009
08.12.2008

Mathematik für Physiker I

Übungsblatt 9

Aufgabe 39: Zum Exponentialgesetz

Sei $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $E(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Zeigen Sie, dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$E(z_1 + z_2) = E(z_1)E(z_2).$$

Hinweis: Cauchy-Produkt von Reihen.

Aufgabe 40: Zur geometrischen Deutung von $\sin$ **und** $\cos$

Bestimmen Sie die Länge des Bogens e^{it}, $0 \le t \le x$, $x > 0$. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Betrachten Sie die Punkte $P_k^n := e^{i\frac{kx}{n}}$, $k = 0, 1, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, auf dem Einheitskreis und den dazugehörigen Polygonzug $P_0^n P_1^n \cdots P_n^n$ mit der Länge $L_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \left| P_k^n - P_{k-1}^n \right|$. Zeigen Sie nun:

i) $L_n = 2n \left| \sin \frac{x}{2n} \right|$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = x$.

iii) Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 41: Die trigonometrischen Funktionen

i) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
   (a) $1 - \cos(x) = 2\sin^2(x/2)$,
   (b) $1 + \cos(x) = 2\cos^2(x/2)$.

Aufgabe 42: Inversion und Cayley-Transformation

i) Die Inversion der komplexen Ebene ist gegeben durch

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Skizzieren und erläutern Sie, was diese Abbildung geometrisch macht, indem Sie die Bilder der Mengen $B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ und $H_+ := \{z \in \mathbb{C} \,|\mathrm{Im}\, z > 0\}$ unter der Abbildung f betrachten.

ii) Die Cayley-Transformation der komplexen Ebene ist gegeben durch

$$g : \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}, \ z \mapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}.$$

Zeigen Sie, dass g die obere Halbebene $H_+ := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im} z > 0\}$ in die Einheitskreischeibe $B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ abbildet, sowie $\mathbb{R}$ in den Einheitskreis $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Aufgabe 43: Polardarstellung komplexer Zahlen

i) Bestimmen Sie die Polardarstellung von

(a) $z_1 = \mathrm{i} + 1$,

(b) $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Berechnen Sie dann $z_1^2 \, \overline{z_2}^3$ einmal direkt und einmal unter Verwendung der Polardarstellung.

ii) Bestimmen Sie alle fünften Wurzeln von i und alle dritten Wurzeln von $\frac{27}{\sqrt{2}}(-1 + \mathrm{i})$.

iii) Was ist falsch an folgender Rechnung? Erläutern Sie!

$$-1 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Die Klausur findet am Samstag, den 07.02.2009, von 10.00 bis 13.00 Uhr im Hörsaal N5 statt.

Soweit nicht anders angegeben, gibt es für jede Aufgabe 4 Punkte!

Abgabe: Montag, 15.12.2008, in der Vorlesung.

Repetitorium zur Vorlesung: Dienstags von 13.00-15.00 Uhr im 8D09.

Siehe auch: www.maphy.uni-tuebingen.de/lehre