Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
02.02.2011
Blatt 15

Übungen zu „Differentialgeometrie I“

1. Sei M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbf{R}$ eine glatte Funktion mit $df = 0$. Zeigen Sie, dass f konstant sein muss. (Hinweis: Sei $p_0 \in M$ und $c_0 = f(p_0)$. Betrachten Sie die Teilmenge $\{p \in M : f(p) = c_0\}$.)

2. Zeigen Sie, dass eine Mannigfaltigkeit nur abzählbar viel (Weg-) Zusammenhangskomponenten haben kann.

3. Sei M eine zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$. Zeigen Sie, dass es einen stückweise glatten Weg $\gamma\colon [0,1] \to M$ von p nach q gibt.

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ mit $[X,Y] = 0$ und $p \in M$, so dass (X_p, Y_p) linear unabhängig ist. Zeigen Sie, dass es dann eine Karte $x\colon U \to V \subseteq \mathbf{R}^n$ $(n = \dim M \geq 2)$ um p gibt, so dass gilt:

$$X|U = \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad Y|U = \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Abgabe: keine mehr