Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
03.11.2010
Blatt 4

Übungen zu „Differentialgeometrie I“

1. Zeigen Sie, dass der reell-projektive Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ hausdorffsch ist und abzählbare Topologie hat.

2. Zeigen Sie, dass der Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^3$, $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$, keine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

3. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit und $\{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i\in I}$ ein topologischer Atlas, $\{\varphi_{ij}\}$ seine Übergänge und $Q = \sum_{i\in I} V_i/\sim$, wo $x_i \sim x_j$ ist, wenn $x_i = \varphi_{ij}(x_j)$ ($x_i \in V_i, x_j \in V_j$) ist. Sei weiter $\Psi : Q \to M$ die stetige Abbildung, die $\Psi \circ \pi(x_i) = \varphi_i^{-1}(x_i)$ für alle $i \in I$ erfüllt (π die kanonische Projektion auf den Quotienten Q). Zeigen Sie, dass Ψ ein Homöomorphismus ist.

4. (a) Sei $\varphi : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion aus dem Nordpol $N = (0, ..., 0, 1)$ heraus, d.h. $(\varphi(p), 0)$ ist der Schnittpunkt der Geraden L durch N und p mit der Ebene $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$. Zeigen Sie, dass $\varphi(p) = \frac{p}{1-p_{n+1}}$ ist und für die Umkehrung $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ gilt:

$$\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{1 + ||x||^2}(2x, -1 + ||x||^2).$$

   (b) Berechnen Sie nun auch die stereographische Projektion $\psi : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$ aus dem Südpol $S = (0, ..., 0, -1)$ heraus. Und zeigen Sie für den Übergang $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x) = \frac{x}{||x||^2}.$$

Abgabe: Mittwoch, 10. November 2010, 9 Uhr