Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
13.10.2010
Blatt 1

Übungen zu „Differentialgeometrie I"

1. Sei V ein reeller Vektorraum.Es heißt $||\cdot|| : V \to [0,\infty)$ eine **Norm** auf V (und $(V, ||\cdot||$ ein **normierter Raum**), wenn gilt
   (a) $||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$, für alle $v \in V$
   (b) $||\lambda v|| = |\lambda|||v||$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$
   (c) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$, für alle $v, w \in V$.

   Zeigen Sie, dass dann durch $d : V \times V \to [0,\infty)$,
   $$d(v,w) := ||v - w||,$$
   eine Metrik auf V gegeben wird.

2. (a) Sei V ein reeller Vektorraum und $< \cdot,\cdot >: V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie, dass dann durch $||\cdot|| : V \to [0,\infty)$,
   $$||v|| := \sqrt{< v, v >},$$
   eine Norm auf V gegeben wird. (Hinweis: Ungleichung von Cauchy-Schwarz.)

   (b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die folgenden Identitäten (für alle $v, w \in V$) gelten:
   - $< v, w >= \frac{1}{4}(||v + w||^2 - ||v - w||^2)$ (Polarisationsformel)
   - $2(||v||^2 + ||w||^2) = ||v + w||^2 + ||v - w||^2$ (Parallelogrammregel)

3. Sei (M, d) ein metrischer Raum, $p \in M$ und $r > 0$. Zeigen Sie, dass die Kugel $B(p;r) \subseteq M$ eine offene Menge ist.

4. Zeigen Sie: Eine Abbildung $\Phi : M \to N$ zwischen metrischen Räumen M und N ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge $V \subseteq N$ offen in M ist.

Abgabe: Mittwoch, 20. Oktober 2010, 9 Uhr