Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
15.12.2010
Blatt 10

Übungen zu „Differentialgeometrie I“

1. Beweisen Sie folgende “Kettenregel”: Seien M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi : M \to N$ und $\Psi : N \to P$ glatte Abbildungen, $p \in M$, $q = \Phi(p) \in N$ und $r = \Psi(q) \in P$. Dann ist auch $\Psi \circ \Phi : M \to P$ glatt und für ihr Differential in p gilt
$$D(\Psi \circ \Phi)_p = D\Psi_q \circ D\Psi_p.$$

2. Sei M^{n+k} eine glatte Mannigfaltigkeit und $N^n \subseteq M^{n+k}$ eine Untermannigfaltigkeit der Codimension k, sowie $\iota : N \to M$ die Inklusion. Zeigen Sie:
   (a) ι is eine “Immersion”, d.h. für jedes $p \in N$ ist $D\iota_p : TN_p \to TM_p$ injektiv.
   (b) Ist $p \in M$, $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von p und $F : U \to \mathbb{R}^k$ eine glatte Abbildung mit $F^{-1}(0) = N \cap U$ und $\operatorname{rang}(DF_p) = k$, so gilt
   $$\operatorname{im}(D\iota_p) = \ker(DF_p).$$

3. Beweisen Sie folgenden “Umkehrsatz”: Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\Phi : M \to N$ glatt, $p \in M$ und $q = \Phi(p) \in N$. Sei $D\Phi_p : TM_p \to TN_q$ ein Isomorphismus. Dann existieren offene Umgebungen $U \subseteq M$ von p und $V \subseteq N$ von q, so dass $\Phi|_U : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

4. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $F\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \mapsto \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$, $F(A) = {}^t\!AA$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{1} \in \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ ein regulärer Wert von F ist und damit, dass O(n) eine Untermf. der Dimension $1/2(n-1)n$ von $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ ist. (Hinweis: Sei $l_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \mapsto \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ die Linksmultiplikation mit $A \in \mathrm{O(n)}$, $l_A(B) = AB$. Zeigen Sie, dass $F \circ l_A = F$ ist und es deshalb reicht zu zeigen, dass $DF_{\mathbb{1}}$ surjektiv ist.)
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{U(n)} \subseteq \mathrm{Mat_n}\mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Untermf. ist. Welche Dimension hat sie? (Hinweis: Verfahren Sie wie unter (a).)
   (c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL_n}\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Mat_n}\mathbb{R}$ eine Untermf. ist. Welche Dimension hat sie?

Abgabe: Mittwoch, 22. Dezember 2010, 9 Uhr