Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
22.12.2010
Blatt 11

Übungen zu „Differentialgeometrie I“

1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathcal{X}(M)$ und φ das zugehörige dynamische System auf M. Ein Punkt $p \in M$ heißt eine “Gleichgewichtslage von φ”, wenn gilt: $I(p) = \mathbb{R}$ und $\varphi^t(p) = p$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: p ist genau dann eine Gleichgewichtslage von φ, wenn p eine Nullstelle von X ist.

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathcal{X}(M)$ und φ das zugehörige dynamische System auf M. Ein Punkt $p \in M$ heißt “periodisch für φ”, wenn es ein $T > 0$ mit $T \in I(p)$ gibt, so dass $\varphi^T(p) = p$ ist und es kein $0 < \tilde{T} < T$ gibt mit $\varphi^{\tilde{T}}(p) = p$. Es heißt dann T die “Periode von p”. Zeigen Sie: Ist p periodisch für φ mit Periode T, so ist $I(p) = \mathbb{R}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt
$$\varphi^{t+T}(p) = \varphi^t(p).$$

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathcal{X}(M)$ und φ das zugehörige dynamische System auf M. Eine glatte Funktion $E : M \to \mathbb{R}$ heißt ein “1. Integral für φ”, wenn E entlang jeder Integralkurve von X konstant ist. Zeigen Sie: Eine glatte Funktion $E : M \to \mathbb{R}$ is genau dann ein 1. Integral für φ, wenn $XE = 0$ ist.

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathcal{X}(M)$ und φ das zugehörige dynamische System auf M. Zeigen Sie: Sind $p, q \in M$ derart, dass $\varphi^t(p) \to q$ für $t \to t_+(p)$, so muss gelten:
   - $t_+(p) = \infty$ und
   - q ist eine Gleichgewichtslage von φ

   (Hinweis: Für festes $0 < s < t_+(p)$ betrachte man den Limes von $t \mapsto \varphi^{s+t}(p) = \varphi^s(\varphi^t(p))$, um $X_q = 0$ zu zeigen.)

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr

Abgabe: Mittwoch, 12. Januar 2011, 9 Uhr