Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
12.01.2011
Blatt 12

Übungen zu „Differentialgeometrie I“

1. (a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Lie-Klammer auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

   (b) Sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra. Zeigen Sie, dass durch

   $$[a, b] := ab - ba$$

   eine Lie-Klammer auf A definiert wird.

2. Betrachten Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Matrizenalgebra $L = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit ihrer natürlichen Lie-Algebra-Struktur. Zeigen Sie, dass

   $$L' := \{A \in L : tr(A) = 0\} \text{ und } L'' := \{A \in L : A + A^t = 0\}$$

   Lie-Unteralgebren von L sind. Welche Dimensionen haben L' und L''?

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, X, Y seien glatte Vektorfelder und f, g seien glatte Funktionen auf M. Zeigen Sie:

   $$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

   (Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass beide Seiten als Derivationen auf den glatten Funktionen von M übereinstimmen)

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $X : M \to TM$ ein glattes Vektorfeld. Zeigen Sie: X ist genau dann glatt, wenn Xf glatt ist, für alle $f \in \mathcal{E}(M)$.

Abgabe: Mittwoch, 17. Januar 2011, 9 Uhr