Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
26.01.2011
Blatt 14

Übungen zu „Differentialgeometrie I"

1. Sei $M = \mathbb{R}^3$ versehen mit dem Koordinatensystem (x, y, z). Es seien dann
$$X := \frac{\partial}{\partial x} \text{ und } Y := \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$
Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{D} = (D_p)$ mit $D_p = \operatorname{span}(X_p, Y_p)$ eine glatte Distribution auf $\mathbb{R}^3$ ist, die nicht involutiv ist.

2. Sei $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der 2-dimensionale Torus und $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ die kanonische Projektion. Für jedes $p \in \mathbb{R}^2$ sei $\iota_p : \mathbb{R}^2 \to T\mathbb{R}^2_p$ der kanonische Isomorphismus.
   (a) Zeigen Sie: Ist $q \in \mathbb{T}^2$ und sind $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei Urbilder von q, so sind die Isomorphismen $\iota_{p_1}^{-1} \circ D\pi_{p_1}^{-1}$ und $\iota_{p_2}^{-1} \circ D\pi_{p_2}^{-1}$ nach $\mathbb{R}^2$ gleich. (Hinweis: Zu $p_1, p_2 \in \pi^{-1}(q)$ gibt es ein $a \in \mathbb{Z}^2$ mit $p_2 = l_a(p_1)$, wo $l_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Translation $x \mapsto x + a$ ist.)
   (b) Sei nun $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $X_\alpha \in \mathcal{X}(M)$ das Vektorfeld, welches unter der Isomorphie von (a) durch $X_\alpha(q) = (1, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \cong T\mathbb{T}^2_q$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass die maximale Integralkurve durch $q = [(0, 0)]$ durch $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$,
$$\varphi(t) = [(t, \alpha t)]$$
gegeben ist und ihr Bild C keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{T}^2$ ist. (Hinweis: C liegt dicht in $\mathbb{T}^2$.)
   (c) Beschreiben Sie die Topologie auf $\mathbb{R}$, die vermöge φ von der Teilraumtopologie von C induziert wird. Ist sie lokal wegzusammenhängend?

3. Seien M und N glatt und $\varphi : M \to N$ eine injektive Immersion. Mann versehe nun $C := \varphi(M)$ derart mit einer Topologie und einer glatten Struktur, dass $\varphi : M \to C$ ein Diffeomorphismus wird. Betrachte nun die Inklusion $\iota : C \to N$ als eine Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie: ι ist eine injektive Immersion, die äquivalent zu $\varphi : M \to N$ ist.

4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intevall mit $0 \in I$ und $A : I \to \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass das lineare System
$$\dot{x} = A(t)x$$
auf $\mathbb{R}^n$ für jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige maximale Lösung $\varphi : I(x_0) \to \mathbb{R}^n$ hat, die auf ganz I definiert ist, $I(x_0) = I$. (Hinweis: Man betrachte das zugehörige autonome System auf $I \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, benutze Gronwalls Lemma, um $||\varphi(t)||$ abzuschätzen, und benutze Satz (3.20) aus der Vorlesung.)

Abgabe: Mittwoch, 2. Februar 2011, 9 Uhr