Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
10.11.2010
Blatt 5

Übungen zu „Differentialgeometrie I"

1. Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\}$ die Neill'sche Parabel.
   (a) Zeigen Sie, dass durch $\pi : M \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto y$, M zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (der Dimension 1) wird.
   (b) Zeigen Sie, dass M diffeomorph zu $\mathbb{R}$ (mit ihrer Standard-Struktur) ist.
2. Auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $z \sim w$, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ mit $w = \lambda z$ gibt. Die Quotientenmenge heißt der n-dimensionale komplex-projektive Raum, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. Versehen Sie nun $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (der Dimension 2n).
3. Sei M^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon U \to V$ eine Karte von M. Zeigen Sie: Versieht man U und V mit den natürlichen Mf.-Strukturen, die sie von M bzw. $\mathbb{R}^n$ erben, so ist φ ein Diffeomorphismus.
4. Sei $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ der komplex-projektive Raum (vgl. Aufgabe 2, Blatt 5) und $SU(n + 1)$ die Gruppe der speziellen, unitären $(n + 1) \times (n + 1)$-Matrizen.
   (a) Zeigen Sie, dass durch $SU(n+1) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : (A, [z]) \to [Az]$ eine Operation von $SU(n+1)$ auf $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gegeben ist.
   (b) Zeigen Sie, dass diese Wirkung transitiv ist und bestimmen Sie die Standgruppe im Punkt $(0 : ... : 0 : 1)$.

Abgabe: Mittwoch, 17. November 2010, 9 Uhr