Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
24.11.2010
Blatt 7

Übungen zu „Differentialgeometrie I“

1. Sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p. Sei weiter $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve mit $\alpha(0) = p$. Zeigen Sie: ist $x \circ \alpha(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$, so gilt

$$\dot{\alpha}(0) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

2. Eine $\mathbb{R}$-Algebra heißt lokal, wenn sie nur ein maximales Ideal hat. Zeigen Sie, dass eine $\mathbb{R}$-Algebra A genau dann lokal ist, wenn $A \setminus A^*$ ($A^* = \{\text{Einheiten von } A\}$) ein Ideal in A ist. (Erinnerung: jede Nicht-Einheit in einem Ring liegt in einem maximalen Ideal (Zorn))

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $A = \varepsilon_p(M)$ die $\mathbb{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime von M in p. Zeigen Sie, dass $f_p \in A$ genau dann eine Einheit ist, wenn $f_p(p) \neq 0$ ist und damit, dass A lokal ist.

4. Sei A die $\mathbb{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime von $\mathbb{R}^n$ in 0 und $\mathbf{m} := \{f_0 \in A : f_0(0) = 0\}$ ihr maximales Ideal. Zeigen Sie, dass $f_0 \in A$ genau dann in $\mathbf{m}^2$ liegt, wenn wenn jeder Repräsentant f von f_0

$$f(0) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, ..., n\}$$

erfüllt.

Abgabe: Mittwoch, 1. Dezember 2010, 9 Uhr