Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
01.12.2010
Blatt 8

Übungen zu „Differentialgeometrie I“

1. Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit, $\alpha : [0,1] \to M$ eine glatte Kurve und $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ eine glatte 1-Form. Wir setzen
$$\int_\alpha \omega := \int_0^1 \omega_{\alpha(t)}(\dot\alpha(t))dt$$
Zeigen Sie: Ist $x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M, $\alpha(t) \in U$ für alle $t \in [0,1]$, $x \circ \alpha(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ und $\omega|_U = \eta_j \circ x dx^j$ mit $\eta_j \in \mathcal{E}(V)$ für $j = 1, ..., n$, so ist
$$\int_\alpha \omega = \int_0^1 \eta_j \circ x(\alpha(t))\dot x^j(t)dt.$$

2. Sei M^n ein glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und A die $\mathbb{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime in p. Sei $\mathbf{m}$ ihr maximales Ideal und $W := \mathbf{m}/\mathbf{m}^2$. Für jedes $f_p \in A$ (f ein Repräsentant von f_p) setzen wir:
$$df_p := (f - f(p)) \bmod \mathbf{m}^2$$
Zeigen Sie: Ist $x : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte um p mit Koordinatenfunktionen $x^1, ..., x^n \in \mathcal{E}(U)$, so ist $(dx^1_p, ..., dx^n_p)$ eine Basis von W. (Hinweis: ObdA $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$ und Aufgabe 4, Blatt 7)

3. Sei M^n ein glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\mathbf{m}_p \in \mathcal{E}_p(M)$ das maximale Ideal. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : \mathcal{E}_p(M) \to TM_p^*$,
$$T(f_p)(\xi) = \xi(f_p)$$
einen Isomorphismus $\tilde T : \mathbf{m}_p/\mathbf{m}_p^2 \to TM_p^*$ induziert.

4. Sei A die $\mathbb{R}$-Algebra der glatten Funktionskeime in $p = 0$, $M = \mathbb{R}$. Für jede offene Umgebung U von p und jede auf U glatte Funktion f bezeichne $Tf_p \in \mathbb{R}[[X]]$ die Taylorreihe von f in p (als formale Potenzreihe), $Tf_p = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^k(0)}{k!}X^k$. Zeigen Sie, dass $T : A \to \mathbb{R}[[X]]$ wohldefiniert und ein Algebra-Homomorphismus ist. Ist T surjektiv, ist T injektiv?

Abgabe: Mittwoch, 8. Dezember 2010, 9 Uhr