Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

WS 2010/11
08.12.2010
Blatt 9

Übungen zu „Differentialgeometrie I“

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $B(r) \subseteq \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Kugel vom Radius $r > 0$ um 0. Zeigen Sie, dass es eine glatte Funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ gibt mit: $\rho|_{B(1)} \equiv 1$ und $\rho|_{\mathbb{R}^n \setminus B(2)} \equiv 0$. (Wir nennen ρ ein “Abschneidefunktion”) Anleitung:

   (a) Betrachte die glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ für $t > 0$ und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$. Man setze dann $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

   $$g(t) := \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)},$$

   zeige, dass g wohldefiniert und glatt ist, skizziere ihren Graphen und zeige: $0 \leq g(t) \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $g(t) = 1$ für $t \geq 1$.

   (b) Nun setze man $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = g(2-t)$, und schließlich

   $$\rho(x) := h(||x||),$$

   und beweise die Aussage.

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

   (a) Zeigen Sie (mit Hilfe von Aufgabe 1), dass es für jeden Keim $s \in \mathcal{E}_p(M)$ einen Repräsentanten $f \in \mathcal{E}(M)$ gibt mit $f_p = s$.

   (b) Zeigen sie: Ist $\dim M$ mindestens 1, so ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}(M) = \infty$. (Hinweis: Teil (a) und Blatt 8, Aufgabe 4)

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

   (a) Zeigen Sie, dass es für jedes $\xi \in TM_p$ eine $X \in \mathcal{X}(M)$ gibt mit$X_p = \xi$.

   (b) Zeigen Sie: Ist $\dim M = n$ und $(X_1, ..., X_n)$ eine $\mathcal{E}(M)$-Basis von $\mathcal{X}(M)$, so ist $(X_1(p), ..., X_n(p))$ eine $\mathbb{R}$-Basis von TM_p.

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$. Zeigen Sie:

   $$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{X}(M) = \infty, \ \dim_{\mathbb{R}} \Omega(M) = \infty.$$

Abgabe: Mittwoch, 15. Dezember 2010, 9 Uhr