Eine Einführung in die Bohmsche Mechanik

Stefan Teufel

Mathematisches Institut der Universität Tübingen

Vorlesung am Forum Scientiarum Tübingen

Wintersemester 2010/11

1. Formulierung der Theorie

2. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

3. Vorhersagen der Theorie
   (a) Bornsche statistische Hypothese $\Rightarrow$ Quantenmechanik
   (b) Begründung der statistischen Hypothese

4. Klassischer Limes und Streutheorie

5. Warum Bohmsche Mechanik?

6. Warum nicht Bohmsche Mechanik?

Bohmsche Mechanik ist eine Galilei-invariante Theorie für die Bewegung von Punktteilchen.

Konfigurationsraum:

Die Konfiguration eines Systems aus N-Teilchen ist der Vektor

$$q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^{3N}$$

wobei

$$q_j \in \mathbb{R}^3$$

der Ort des j-ten Teilchens ist.

Die Theorie liefert zu geeigneten Anfangsdaten eine Trajektorie

$$t \mapsto Q(t) \in \mathbb{R}^{3N}$$

im Konfigurationsraum. Diese Lösung legt die Orte aller Teilchen zu allen Zeiten fest. Dies ist die gesamte Vorhersage der Theorie, alles andere (Geschwindigkeiten, Impulse, Energien etc.) sind abgeleitete Größen.

Zustandsbeschreibung:

Der Zustand eines Systems zu einer festen Zeit t wird beschrieben durch

die Wellenfunktion $\psi(t) : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{C}$

und die Konfiguration: $Q(t) \in \mathbb{R}^{3N}$

Dynamik:

Die Größen $(Q(t), \psi(t))$ erfüllen die folgenden Differentialgleichungen:

Schrödingergleichung $\mathrm{i}\partial_t \psi(t,q) \;=\; H\psi(t,q)$

Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t) \;=\; \mathrm{Im}\, \frac{\nabla_q \psi(t,\cdot)}{\psi(t,\cdot)}\Big|_{q=Q(t)} \;=:\; v^{\psi(t)}(Q(t))$

Es ist H der Hamiltonoperator, ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung. Das Bohmsche Vektorfeld läßt sich auch schreiben in der Form

$$v^{\psi(t)}(q) = \frac{\mathrm{Im}\, \overline{\psi}(t,q)\nabla\psi(t,q)}{|\psi(t,q)|^2} =: \frac{j^{\psi(t)}(q)}{\rho^{\psi(t)}(q)}\,.$$

Dynamik:

Die Größen $(Q(t), \psi(t))$ erfüllen die folgenden Differentialgleichungen:

Schrödingergleichung $\quad \mathrm{i}\partial_t \psi(t,q) = H\psi(t,q)$

Bewegungsgleichung $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t) = \mathrm{Im} \left. \frac{\nabla_q \psi(t,\cdot)}{\psi(t,\cdot)} \right|_{q=Q(t)} =: v^{\psi(t)}(Q(t))$

Die quantenmechanische Wellenfunktion erzeugt also ein zeitabhängiges Vektorfeld auf dem Konfigurationsraum, dessen Integralkurven die Bahnen der Teilchen sind.

Das ist alles, der Rest folgt aus einer Analyse der Gleichungen!

Schrödingergleichung $\mathrm{i}\partial_t\psi(t,q) \;=\; H\psi(t,q)$

Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t) \;=\; \mathrm{Im}\,\frac{\nabla_q\psi(t,\cdot)}{\psi(t,\cdot)}\Big|_{q=Q(t)} \;=:\; v^{\psi(t)}(Q(t))$

Die **Lösungstheorie der Schrödingergleichung** ist bestens verstanden: Ist $(H, D(H))$ ein dicht definierter selbstadjungierter Operator auf $L^2(\mathbb{R}^{3N})$, so existiert eine eindeutige stark-stetige unitäre Gruppe

$$U(t) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}$$

so, dass für $\psi_0 \in D(H)$ und $\psi(t) := U(t)\psi_0$ gilt

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) \;=\; H\,\psi(t)\,.$$

Hier brauchen wir allerdings mehr Regularität als L^2 oder $W^{2,2}$. Da H typischerweise ein elliptischer Operator ist, bekommt man aber auch das mit Hilfe von Standardtechniken.

Schrödingergleichung $\mathrm{i}\partial_t \psi(t,q) \;=\; H\psi(t,q)$

Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t) \;=\; \mathrm{Im}\, \left.\frac{\nabla_q \psi(t,\cdot)}{\psi(t,\cdot)}\right|_{q=Q(t)} \;=:\; v^{\psi(t)}(Q(t))$

Aber: selbst wenn $\psi(\cdot,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \setminus \mathcal{S})$, so erfüllt das Vektorfeld $v^{\psi(t)}$ weder eine globale noch eine lokale Lipschitzbedingung.

Probleme:

- Lösung läuft in Singularität des Potentials, wo ψ nicht diffbar ist
- Lösung läuft in Nullstelle von ψ
- Lösung läuft in endlicher Zeit nach Unendlich

Allgemeine Resultate zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher DGLen greifen nicht.

Theorem (T.-Tumulka, CMP 2004)

Für eine große Klasse von Hamiltonoperatoren H gilt:

Sei $\psi_0 \in C^\infty(H) := \bigcap_{n=1}^\infty D(H^n)$ dann existiert die Lösung der Bohmschen DGL für μ^{ψ_0}-fast alle Anfangskonfigurationen $Q_0 \in \mathbb{R}^{3N}$, wobei

$$\mu^{\psi_0}(\Lambda) := \int_\Lambda |\psi_0(q)|^2 \, \mathrm{d}^{3N}q$$

das Maß mit Dichte $|\psi_0|^2$ bezüglich des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}^{3N}$ ist.

Das Maß mit der Dichte $|\psi(t)|^2$ ist **äquivariant**: sei

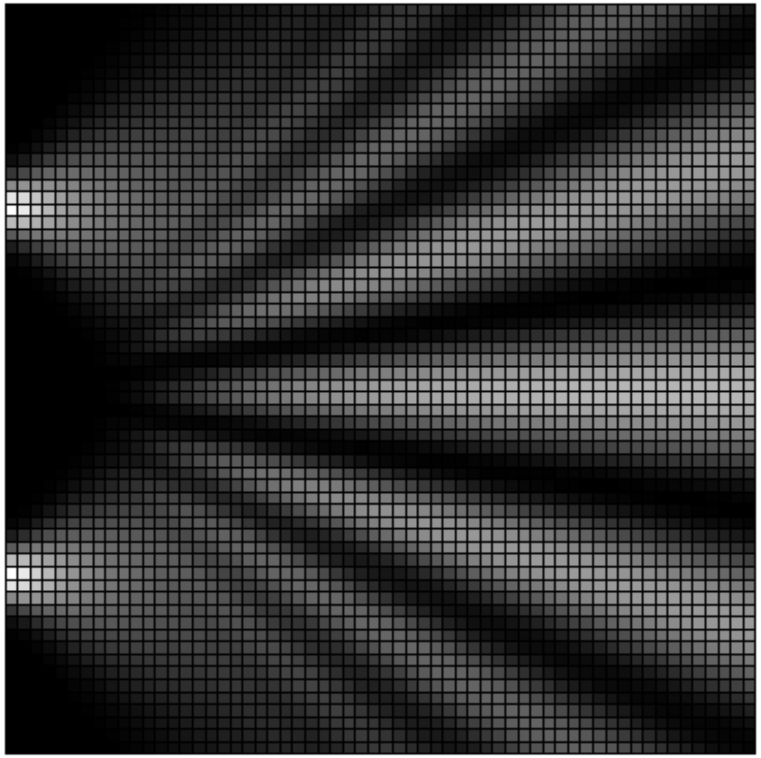
$$\Phi_t : \mathbb{R}^{3N} \setminus \mathcal{Q}_0 \to \mathbb{R}^{3N} \setminus \mathcal{Q}_t \,, \quad Q_0 \mapsto \Phi_t(Q_0) := Q(t)\,,$$

der Bohmsche Fluss, dann gilt

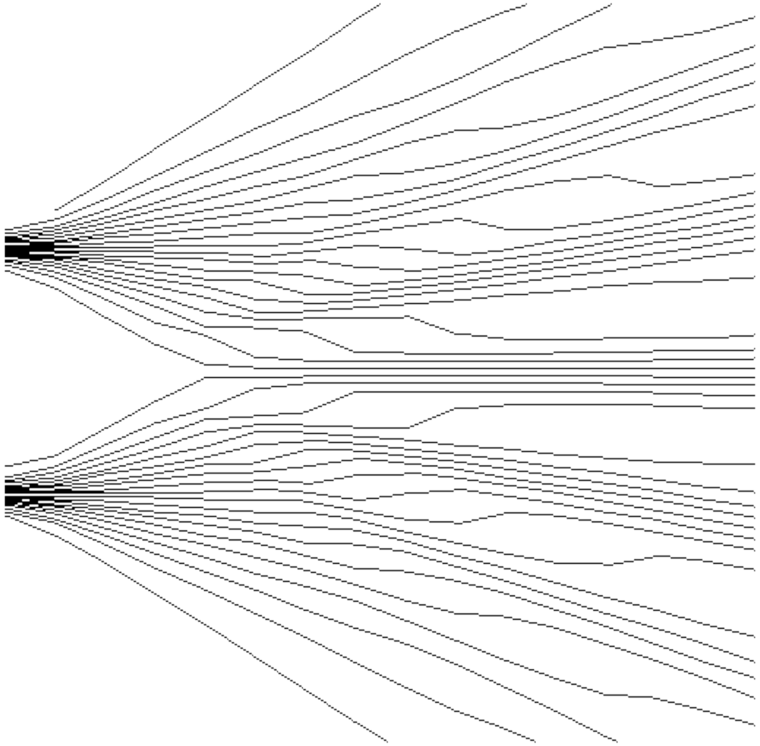
$$\mu^{\psi(t)} = \mu^{\psi_0} \circ \Phi_t^{-1}\,.$$

Siehe auch Berndl-Dürr-Goldstein-Peruzzi-Zanghi, CMP 1995.

Doppelspaltexperiment:



Wellenfunktion



einige Trajektorien

Quantengleichgewichtshypothese:

Ein System habe die Wellenfunktion ψ_0, dann ist die Konfiguration Q_0 zufällig und μ^{ψ_0}-verteilt.

Gleichgewichtshypothese in der klassischen Mechanik:

Ein System im thermischen Gleichgewicht habe Energie $H = E$, dann ist der Phasenraumpunkt (Q, P) zufällig und verteilt gemäß dem Liouville-Maß μ^H auf der Energieschale.

Quantengleichgewichtshypothese:

Ein System habe die Wellenfunktion ψ_0, dann ist die Konfiguration Q_0 zufällig und μ^{ψ_0}-verteilt.

Es stellen sich zwei Fragen:

- Was folgt aus der Hypothese?

  Antwort: der Messformalismus der Quantenmechanik!

- Kann man die Hypothese aus der Theorie heraus begründen?

  Antwort: Ja, typische Bohmsche Universen sind im Quantengleichgewicht!

  $\Rightarrow$ Präzise Formulierung der Hypothese.

Was folgt aus der Hypothese?

Aufgrund der Äquivarianz

$$\mu^{\psi(t)} = \mu^{\psi_0} \circ \Phi_t^{-1} .$$

sind die Orte zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ dann $\mu^{\psi(t)}$-verteilt.

Die Born'sche Regel gilt somit für alle Zeiten und daraus folgt schon der Messformalismus der Quantenmechanik.

Beispiel: die "Impulsverteilung"

Für ein freies Teilchen ist die Verteilung der asymptotischen Geschwindigkeit gegeben durch die Fouriertransformierte der Anfangswellenfkt. ψ_0:

$$\mu^{\psi_0}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{Q(t)}{t} \in \Lambda\right) = \int_\Lambda |\widehat{\psi}_0(k)|^2 \, \mathrm{d}^3k .$$

Es gilt sogar

$$\mu^{\psi_0}\left(\lim_{t\to\infty} \dot{Q}(t) \in \Lambda\right) = \int_\Lambda |\widehat{\psi}_0(k)|^2 \, \mathrm{d}^3k .$$

Allgemeines Experiment:

Sei $Q = (X, Y)$, wobei X die Konfiguration des "Systems" und Y die Konfiguration des "Messapparats" sei.

Annahmen:

(1) Man kann das "Messergebnis" am Ende des Experiments aus der Konfiguration $Y(T)$ des Apparats ablesen, d.h. es gibt eine (messbare) Funktion f vom Konfigurationsraum $\mathcal{C}_y$ des Apparats in die Menge der möglichen Messergebnisse Ω,

$$f : \mathcal{C}_y \to \Omega\,.$$

(2) Der Anfangszustand ist von der Form $\Psi_0(x,y) = \psi_0(x)\,\Phi_0(y)$.

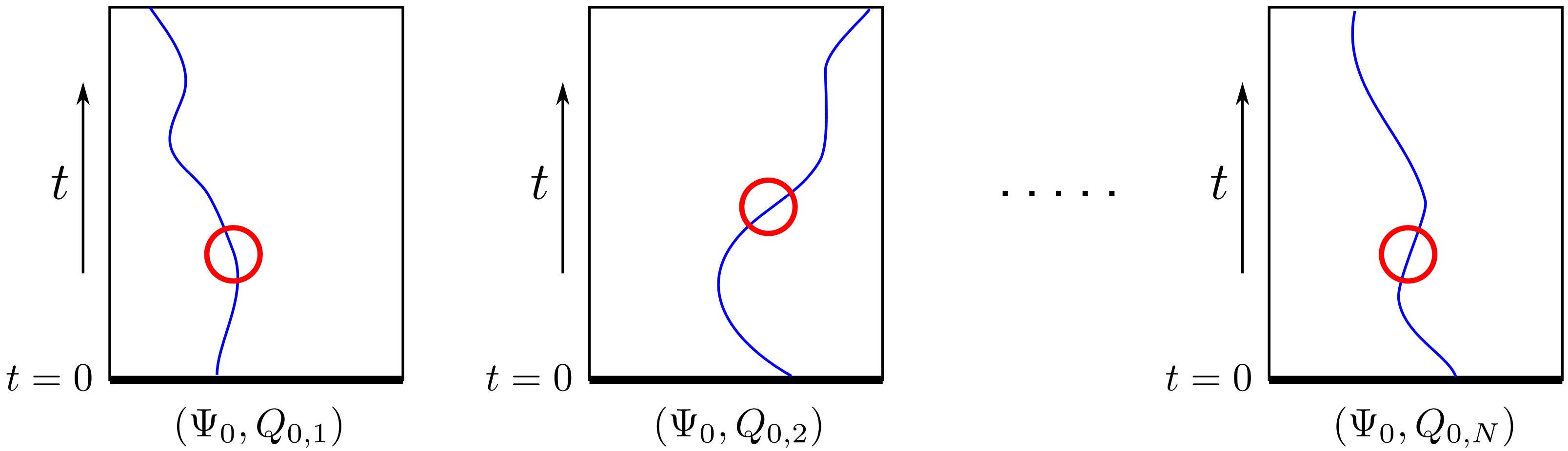
Dann gilt

$$\mathbb{P}(\omega \in \Lambda\,|\,\psi_0) \;:=\; \mu^{\Psi_0}\Big(Y(T) \in f^{-1}(\Lambda)\Big) \;=\; \langle \psi_0, E(\Lambda)\psi_0\rangle_{\mathcal{H}_x}$$

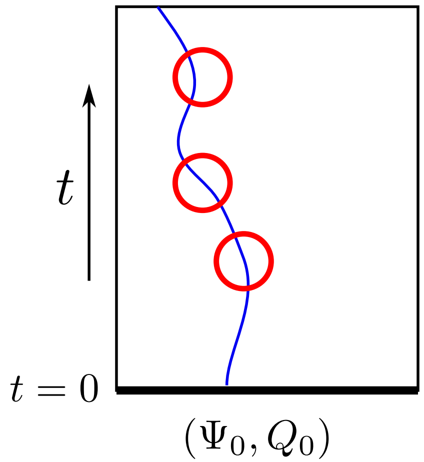
mit einem POVM $E : \mathcal{S}(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$.

Die Quantengleichgewichtshypothese ist im Sinne relativer Häufigkeiten für Subsysteme eines **einzelnen** "Bohmschen Universums" zu verstehen.

Also <u>nicht</u> im Sinne eines Ensembles von Universen



sondern in einem einzigen



Wellenfunktion eines Subsystems:

Die bedingte Wellenfunktion des Subsystems gegeben die Konfiguration $Y(t)$ der Umgebung ist

$$\psi^Y_{\mathsf{cond}}(t,x) = \frac{\Psi(t,x,Y(t))}{\|\cdots\|}$$

und es gilt

$$\dot{X}(t) \;=\; \mathsf{Im}\, \frac{\nabla_x \Psi(t,\cdot,Y(t))}{\Psi(t,\cdot,Y(t))}\bigg|_{x=X(t)} \;=\; \mathsf{Im}\, \frac{\nabla_x \psi^Y(t,\cdot)}{\psi^Y(t,\cdot)}\bigg|_{x=X(t)}.$$

Es gilt die folgende Formel für die Verteilung von $X(t)$ bedingt unter der Konfiguration der Umgebung,

$$\mu^{\Psi_0}\Big(\{X(t)\in\Lambda\} \mid Y(t)\Big) = \int_\Lambda |\psi^Y_{\mathsf{cond}}(t,x)|^2\,\mathsf{d}x$$

Das x-System bestehe zur Zeit t aus N gleichartigen Teilen mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_N$. Angenommen, die bedingte Wellenfunktion ist von der Form

$$\psi^Y(x) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_N)\,.$$

Dann gilt

$$\mu^{\Psi_0}\Big(\{X(t) \in \Lambda\} \mid Y(t)\Big) = \int_\Lambda |\varphi(x_1)|^2 \cdots |\varphi(x_N)|^2 \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N\,.$$

Die Konfigurationen $X_1(t), \ldots, X_N(t)$ sind dann also unabhängige und identisch μ^φ-verteilte Zufallsvariablen auf $(\mathcal{C}, \mu^{\Psi_0})$.

Es gilt offenbar auch

$$\mu^{\Psi_0}\Big(\{X(t) \in \Lambda\} \mid \psi^Y(x) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_N)\Big) = \int_\Lambda |\varphi(x_1)|^2 \cdots |\varphi(x_N)|^2 \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N\,.$$

Um die Quantengleichgewichtshypothese zu bestätigen, müssen wir die **empirische Verteilung**

$$\mu_{\mathsf{emp}} := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta(\cdot - X_j(t))\,,$$

eine Maß-wertige Zufallsvariable, mit der **Quantengleichgewichtsverteilung** μ^{φ} vergleichen.

Wir akzeptieren die **Quantengleichgewichtshypothese** für eine Realisierung $Q_0 \in \mathcal{C}$, wenn für eine geeignete Klasse von Testfunktionen f und ein zu wählendes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|\left(\mu_{\mathsf{emp}}(X(t)) - \mu^{\varphi}\right)(f)| := \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(X_j(t)) - \int f(x)|\varphi(x)|^2\,\mathsf{d}x\right| < \varepsilon\,.$$

Wir akzeptieren die **Quantengleichgewichtshypothese** für eine Realisierung $Q_0 \in \mathcal{C}$, wenn für eine geeignete Klasse von Testfunktionen f und ein zu wählendes $\varepsilon > 0$ gilt

$$|\left(\mu_{\mathrm{emp}}(X(t)) - \mu^{\varphi}\right)(f)| := \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} f(X_j(t)) - \int f(x) |\varphi(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right| < \varepsilon \,.$$

Da die Zufallsvariablen $f(X_1), \ldots, f(X_N)$ unabhängig und identisch verteilt sind, gilt aber nach dem **schwachen Gesetz der großen Zahl**, dass

$$\mu^{\Psi_0}\left(\left\{Q_0 : \left|\left(\mu_{\mathrm{emp}}(X(t)) - \mu^{\varphi}\right)(f)\right| \geq \varepsilon\right\} \,|\, Y(t)\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(f)}{\varepsilon^2 N} \xrightarrow{N \to \infty} 0 \,.$$

Die Menge der Anfangsdaten Q_0 (also der Bohmschen Universen) für die wir die Quantengleichgewichtshypothese verwerfen müßten hat also kleines Maß.

Ist das Argument nur $|\Psi_0|^2$ rein, $|\varphi|^2$ raus? Nein!

Analogie: Für einen typischen Punkt Z auf der Energieschale eines idealen Gases aus N Teilchen sind die Geschwindigkeiten $v_j(Z)$ der Teilchen verteilt gemäß der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung

$$\mu\left(\left\{Z : \left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f(v_j) - \int_{\mathbb{R}^3} f(v)\mathrm{e}^{-v^2/E}\,\mathrm{d}v\right| > \varepsilon\right\} \,\middle|\, H(Z) = NE\right) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Oder noch allgemeiner:

Auch ein typisches klassisches System ist im Gleichgewicht.

Die **Streutheorie** ist ein weiterer Formalismus der Quantenmechanik, welcher sich ebenfalls rigoros aus der Bohmschen Mechanik ableiten läßt, siehe beispielsweise

On the Quantum Mechanical Scattering Statistics of Many Particles,
D. Dürr, M. Kolb, T. Moser, S. Römer,
Letters in Mathematical Physics 2010.

Der **klassische Limes** der Bohmschen Mechanik ist ebenfalls mathematisch untersucht worden.

Auf der Ebene der statistischen Vorhersagen folgt alles aus dem klassischen Limes der Quantenmechanik.

Man kann aber auch zeigen, dass in manchen Situationen die Bohmschen Bahnen nahe an den Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen liegen, siehe beispielsweise

On the classical limit of Bohmian mechanics for Hagedorn wave packets,
D. Dürr, S. Römer,
Submitted to Journal of Functional Analysis

- Die Theorie ist präzise formulierbar:

  Keine Bezugnahme auf “Beobachter”, “Experiment”, “Observable” oder ”klassischer Apparat” in der Definition der Theorie.

- Irreversibles zufälliges Verhalten auf makroskopischer Ebene wird im Sinne von Boltzmann aus einer reversiblen, deterministische mikroskopischen Theorie heraus erklärt.

  Der quantenmechanische Formalismus kann als Gleichgewichtsformalismus der Bohmschen Mechanik verstanden werden.

- Das **Messproblem der Quantenmechanik** wird gelöst:

  Auch wenn $\Psi(t)$ die Superposition einer toten und einer lebenden Katze beschreibt, so ist $Q(t)$ entweder die Konfiguration einer toten oder die Konfiguration einer lebenden Katze.

(1) Man kann die Bohmschen Bahnen nicht messen, deshalb ist das Philosophie und keine Physik.

- Dass die gemessenen und die ungemessenen Bahnen nicht übereinstimmen, verwundert bei mikroskopischen Systemen nicht.
- Einstein: Die Theorie sagt uns was wir messen (können).
- In der Quantenmechanik misst man ??? Jedenfalls misst man nicht die Wellenfunktion.

(2) Bell hat gezeigt, dass es keine lokalen verborgenen Parameter geben kann.

- Bohmsche Mechanik ist nichtlokal, genau wie jede andere Theorie die die quantenmechanischen (experimentell bestätigten) Vorhersagen reproduziert.

(3) Wenn es kein Problem gibt, warum ist Bohmsche Mechanik nicht Standard?

John S. Bell (1987)

Is it not clear from the smallness of the scintillation on the screen that we have to do with a particle? And is it not clear, from the diffraction and interference patterns, that the motion of the particle is directed by a wave? De Broglie showed in detail how the motion of a particle, passing through just one of two holes in a screen, could be influenced by waves propagating through both holes. And so influenced that the particle does not go where the waves cancel out, but is attracted to where they cooperate. This idea seems to me so natural and simple, to resolve the wave-particle dilemma in such a clear and ordinary way, that it is a great mystery to me that it was so generally ignored.

(4) Das geht nicht relativistisch bzw. nicht für Quantenfeldtheorie.

- Eine Lehre aus dieser Theorie sollte sein, dass man mit Aussagen über Dinge die nicht sein können sehr vorsichtig sein sollte.

Literatur, Bilder und Links unter `http://www.bohmian-mechanics.net`

Quantengleichgewicht:

Quantum Equilibrium and the Origin of Absolute Uncertainty,
D. Dürr, S. Goldstein und N. Zanghi.
Journal of Statistical Physics 67, 843–907 (1992). quant-ph/0308039

Quantenmechanischer Messformalismus:

Quantum Equilibrium and the Role of Operators as Observables in Quantum Theory,
D. Dürr, S. Goldstein und N. Zanghi.
Journal of Statistical Physics 116, 959–1055 (2004). quant-ph/0308038

Für Leute mit viel Zeit:

Bohmian Mechanics
D. Dürr und S. Teufel.
Springer 2009