Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 10/11
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 10 (Abgabe am 16.12.)

Aufgabe 34

Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \mathrm{tr}(X) = 0, X^\dagger = X\}$ von SU(2) ist ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis ist durch die Pauli-Matrizen gegeben.

Zeigen Sie:

a) SU(2) wirkt auf $\mathfrak{su}(2)$ durch Konjugation: $X \mapsto UXU^\dagger$.

b) $\langle X, Y\rangle := \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(XY)$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\mathrm{tr}(\sigma_i\sigma_j)$.

c) Jedes $U \in \mathrm{SU}(2) \cong S^3$ (vgl Aufgabe 19) kann als $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\alpha\vec{\sigma}\cdot x}$ mit $x \in S^2$ geschrieben werden. Welchen Bereich durchläuft α?

Aufgabe 35

Die Elemente von $\mathfrak{su}(2)$ können wie in Aufgabe 31 als $X = \vec{\sigma}x$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ geschrieben werden. Die Wirkung von SU(2) auf $\mathfrak{su}(2)$ (siehe Aufgabe 34) definiert dann einen Homomorhismus

$$\varphi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$$
$$\vec{\sigma}\varphi(U)x := U(\vec{\sigma}x)U^\dagger\,.$$

Dieser erfüllt:

a) $\varphi(U)_{ij} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\sigma_i U\sigma_j U^\dagger)$,

b) $\varphi(U)^T = \varphi(U)^{-1}$,

c) $\det(\varphi(U)) = 1$.
Hinweis: Denken Sie an die Zusammenhangseigenschaften von SO(3).

Damit ist $\varphi(\mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SO}(3)$.

d) Berechnen Sie den Kern von φ.

e) Berechnen Sie $\varphi(U_\alpha)$ für $U_\alpha = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\alpha\sigma_3}$, $\alpha \in [0, 4\pi)$ und begründen Sie (ohne Rechnung), dass $\varphi(\mathrm{SU}(2)) = \mathrm{SO}(3)$ ist.
Was sagt dann der Homomorphiesatz?

Aufgabe 36

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$. Sie ist als Niveaumenge zum regulären Wert 0 der Funktion $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(n)$, $F(A) = A^T A - \mathbb{1}$ gegeben, d.h. $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : F(A) = 0\} = F^{-1}(0)$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{o}(n)$ is der Tangentialraum an der Identität und gegeben durch $\mathfrak{o}(n) = \mathrm{Ker}(DF|_{\mathbb{1}})$.

Berechnen Sie $\mathfrak{o}(n)$ explizit und bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{O}(n)$.

Aufgabe 37

Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und H ein total unzusammenhängender Normalteiler. Folgern Sie, dass für alle $g \in G$ und $h \in H$ $gh = hg$ gilt.