Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart Wintersemester 10/11

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 11 (Abgabe am 23.12.)

Aufgabe 38

a) Berechnen Sie das Haar-Maß auf SU(2) in der Parametrisierung

$$U = \exp\left(-\mathrm{i}\tfrac{\alpha}{2}\vec{\sigma}\vec{x}\right)\,,$$

mit $0 \leq \alpha < 4\pi$, $\vec{x} \in S^2$. Normieren Sie es so, dass $\mathrm{vol}(\mathrm{SU}(2)) = 1$.
HINWEIS: Es ist hilfreich zunächst $(\vec{x}\vec{\sigma})(\vec{y}\vec{\sigma}) = \vec{x}\vec{y}\mathbb{1} + \mathrm{i}\vec{\sigma}(\vec{x} \times \vec{y})$ zu zeigen und die Einheitsvektoren $e_r, e_\varphi, e_\vartheta$ in Kugelkoordinaten zu verwenden.

b) Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil a) zusammen mit Aufgabe 37 um das Haar-Maß auf SO(3) in der Achse-Winkel Parametrisierung zu bestimmen.

Aufgabe 39

Sei $V = \mathbb{C}^m$, wir definieren

$$V^{\otimes n} := \bigotimes_{k=1}^{n} V = V \otimes V^{\otimes(n-1)}\,.$$

Definieren Sie, auf natürliche Weise, Darstellungen Γ von S_n und D von $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ auf $V^{\otimes n}$ für die $\Gamma(\sigma)D(g) = D(g)\Gamma(\sigma)$ für alle $\sigma \in S_n$ und $g \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ gilt.

Aufgabe 40

Auf $C^1(\mathbb{R}^3)$ ist eine Darstellung Γ von SO(3) gegeben durch:

$$\Gamma(R)f(x) = f(R^{-1}x)\,.$$

Bestimmen Sie, welche irreduziblen Darstellungen von SO(3) in Γ vorkommen.

HINWEIS: Bestimmen Sie die Darstellung von z.B. $J_3 \in \mathfrak{so}(3)$ in Kugelkoordinaten und benützen Sie das Verfahren aus 6.8.

Aufgabe 41

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir definieren

$$\mathrm{ad}_A B := [A, B]\,.$$

a) Zeigen Sie (für $t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} B \mathrm{e}^{-tA} &= \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_A} B \\ &= B + t[A, B] + \frac{t^2}{2}[A, [A, B]] + \dots \end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass beide Seiten das selbe Anfangswertproblem lösen.

b) Sei $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ analytisch; $\beta, u \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{\beta Z(t)} = \int_0^\beta \mathrm{e}^{(\beta-u)Z(t)} Z'(t) \mathrm{e}^{uZ(t)} du\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass beide Seiten das selbe Anfangswertproblem (in β) lösen.

c) Sei $\mathrm{e}^{Z(t)} := \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$. Setzen Sie in Teil b) $\beta = 1$, $u = 1 - x$ und folgern Sie

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{xZ(t)} Z'(t) \mathrm{e}^{-xZ(t)} dx = A + \mathrm{e}^{t\mathrm{ad}_A} B\,.$$

Wann gilt $Z(t) = t(A + B)$?

d) Entwickeln Sie Z aus Teil c) um $t = 0$ und zeigen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff Formel

$$Z(t) = t(A + B) + \frac{t^2}{2}[A, B] + \frac{t^3}{12}\left([A, [A, B]] + [[A, B], B]\right) + \mathcal{O}(t^4)\,.$$

Hinweis: Berechnen Sie die linke Seite in c) mit Hilfe von a) und vergleichen Sie die Koeffizienten der Potenzreihen.