Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart Wintersemester 10/11

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 12 (Abgabe am 13.01.2011)

Aufgabe 42

Sei G eine Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, und sei ad die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} K &: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \\ &(X, Y) \mapsto K(X, Y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad}_X \circ \operatorname{ad}_Y) \end{aligned}$$

heißt Killing-Form.

Zeigen Sie

a) K ist bilinear und symmetrisch.

b) $K(\operatorname{Ad}_g(X), \operatorname{Ad}_g(Y)) = K(X, Y) \quad \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}$ und $\forall\, g \in G$.

Für halbeinfache Lie-Gruppen (haben wir nicht definiert, aber die klassischen Gruppen $\mathrm{SU}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ gehören dazu) ist K positiv definit, definiert also ein Skalarprodukt. Wir wählen in diesem Fall eine Orthonormalbasis $\{X_j\}$ bezüglich K, d.h. $K(X_j, X_k) = \delta_{jk}$, und definieren $C_2 \in E(\mathfrak{g})$ durch

$$C_2 := \sum_j X_j X_j \,.$$

Zeigen Sie:

c) C_2 ist unabhängig von der Wahl der ON-Basis.

d) C_2 ist ein Casimir-Operator (der *quadratische Casimir-Operator*), d.h.

$$\operatorname{Ad}_g(C_2) = C_2 \quad \forall\, g \in G\,.$$

Aufgabe 43

Sei Γ eine irreduzible Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ auf $\mathbb{C}^n$. Zeigen Sie, dass es ein $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ mit $T^2 \in \{\pm \mathbb{1}\}$ gibt, so dass für alle $g \in \mathrm{SU}(2)$

$$\Gamma(g)^* = T\Gamma(g)T^{-1}$$

gilt. Wann gilt $T^2 = \mathbb{1}$?

Hinweis: Finden Sie zunächst T für die definierende Darstellung. Beobachten Sie, dass $T \in \mathrm{SU}(2)$ und untersuchen Sie $\Gamma(T)$.

Aufgabe 44

a) Zeigen Sie folgende Formel für die Charaktere der Darstellung Γ^j von SU(2)

$$\chi^j(\alpha) = \frac{\sin\left((2j+1)\alpha/2\right)}{\sin(\alpha/2)}\,.$$

b) Betrachten Sie die Produktdarstellung $\Gamma^j \otimes \Gamma^k$ mit $j \geq k$. Zeigen Sie, dass jede irreduzible Darstellung Γ^l mit $l = j-k, \ldots, j+k$ genau einmal und alle anderen Darstellungen überhaupt nicht darin vorkommen.