Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart

Wintersemester 10/11

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 14 (Abgabe am 27.01.)

Aufgabe 48

In einem Hadronen-Multiplett sind die Massen der Teilchen mit dem selben Isospin ungefähr gleich, während für verschiedene Isospin-Multipletts die Massen stärker voneinander abweichen. Dies liegt daran, dass das strange-Quark deutlich schwerer ist als die up- und down-Quarks und damit die $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{Flavor}}$-Symmetrie explizit gebrochen ist. Da in der starken Wechselwirkung Isospin und Hyperladung erhalten sind, ist die verbleibende Symmetriegruppe $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{Isospin}} \times \mathrm{U}(1)_{\mathrm{Hyperladung}}$.

In dieser Aufgabe leiten wir die Gell-Mann-Okubo Formel für das Dekuplett her, mit der 1961 die Masse des noch unbekannten Ω^--Teilchens vorhergesagt wurde.

Wir nehmen an, dass der Hamilton-Operator die Form $H = H_0 + H'$ hat, wobei H_0 invariant unter $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{Flavor}}$ ist und H' eine kleine Störung darstellt, die weiterhin invariant unter $\mathrm{SU}(2)_I \times \mathrm{U}(1)_Y$ ist. Jedes Baryon ist durch einen normierten Zustand $|\psi\rangle$ beschrieben, mit Masse $m = \langle\psi|H|\psi\rangle$.

Die ungestörten Zustände, die wir mit $\psi_i^\lambda \equiv \psi_{(I_3 Y)I}^\lambda$ bezeichnen, bilden SU(3)-Multipletts, wobei λ die irreduzible Darstellung von SU(3) kennzeichnet. Wenn wir nur H_0 betrachten, ergibt sich für alle ungestörten Zustände die gemeinsame Masse $\langle\psi_i^\lambda|H_0|\psi_i^\lambda\rangle = a_\lambda$. Die Massenunterschiede innerhalb eines Multipletts sind in 1. Ordnung Störungstheorie gegeben durch die Eigenwerte Δm_i^λ der Matrix $M_{ij}^\lambda = \langle\psi_i^\lambda|H'|\psi_j^\lambda\rangle$. Wegen der Erhaltung von Isospin und Hyperladung ist diese Matrix diagonal, d.h.

$$\Delta m_i^\lambda = \langle\psi_i^\lambda|H'|\psi_i^\lambda\rangle \, .$$

a) Wir nehmen an, dass H' als Linearkombination von irreduziblen Operatoren (s. 4.2) bezüglich SU(3) geschrieben werden kann. (Wieso ist das eine sinnvolle Annahme?) Zeigen Sie, dass der Singulett-Anteil dieser Entwicklung keine Massenunterschiede innerhalb eines Multipletts liefert, sondern nur eine konstante Verschiebung, die in a_λ absorbiert werden kann.

b) Folgern Sie aus der Invarianz von H' unter $\mathrm{SU}(2)_I \times \mathrm{U}(1)_Y$, dass H' nur Operatoren O_k^μ enthalten darf, die dem Zustand mit $Y = I = I_3 = 0$ entsprechen, also $k = (00)0$.

   Zeigen Sie, dass die Triplett- und Dekuplett-Darstellungen (vgl. Aufgaben 33 und 47) deshalb keinen Beitrag zu H' lieferen.

   Das Sextett $\square\square$ liefert übrigens ebenfalls keinen Beitrag. Wenn wir höherdimensionale Darstellungen vernachlässigen, enthält H' somit nur Operatoren, die sich wie $O_{(00)0}^8$ transformieren.

c) Wir betrachten nun $\Delta m_i^\lambda = \langle \psi_i^\lambda | O^8_{(00)0} | \psi_i^\lambda \rangle$. Nach 4.2 transformiert sich $O^8_{(00)0} | \psi_i^\lambda \rangle$ in der Produktdarstellung $D^\lambda \otimes \ydiagram{2,1}$. Begründen Sie, warum für Δm_i^λ nur die D^λ-Komponente dieses Produktes relevant ist.

d) Formulieren Sie das Wigner-Eckart-Theorem für $\langle \psi_i^\lambda | O^8_{(00)0} | \psi_i^\lambda \rangle$ und verwenden Sie Aufgabe 46, um die Zahl der freien Parameter (in Abhängigkeit von λ) zu bestimmen.

e) Sei nun D^λ eine Darstellung, die zu einem rechteckigen Young-Diagramm gehört und S, T zwei Operatoren, die sich wie $O^8_{(00)0}$ transformieren. Folgern Sie aus Teil d), dass $\langle \psi_i^\lambda | S | \psi_i^\lambda \rangle / \langle \psi_i^\lambda | T | \psi_i^\lambda \rangle$ nicht von I und Y abhängt.

f) Die 8 Generatoren von SU(3) sind gegeben durch die Gell-Mann Matrizen

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{σ_i}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sie transformieren sich in der adjungierten Darstellung, die der Oktett-Darstellung $\ydiagram{2,1}$ entspricht. Zeigen Sie, dass $\hat{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8$ ein Operator ist, der sich wie $O^8_{(00)0}$ transformiert und folgern Sie daraus

$$\Delta m_i^\lambda = b_\lambda \, Y \quad \text{für rechteckige Young Diagramme } \Theta_\lambda,$$

wobei der Faktor b_λ für ein gegebenes Multiplett konstant ist. Insbesondere gilt dies also für das Dekuplet mit $\Theta_\lambda = \ydiagram{3}$.

g) In der folgenden Tabelle sind die Massen (in MeV/c^2, nach K. Nakamura *et al.* (Particle Data Group) J. Phys. G **37** (2010) 075021) und einige Quantenzahlen von neun der zehn Teilchen des Dekupletts angegeben. Welche Masse erwarten Sie, basierend auf dem Ergebnis der vorangegangenen Aufgabenteile, für das fehlende Teilchen?

	Δ^-	Δ^0	Δ^+	Δ^{++}	Σ^{*-}	Σ^{*0}	Σ^{*+}	Ξ^{*-}	Ξ^{*0}
I	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
I_3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
m	1232	1232	1232	1232	1387	1384	1383	1535	1532