Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart Wintersemester 10/11

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 3 (Abgabe am 28.10.)

Aufgabe 9

Sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus mit Kern K und Bild B. Zeigen Sie:

a) K ist eine invariante Untergruppe von G

b) φ induziert einen Isomorphsimus $\hat{\varphi} : G/K \to B$

Aufgabe 10

Sei $\phi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{O}(3, 1)$ der in der Vorlesung eingeführte Homomorphismus in die Lorentzgruppe. Seien $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$, $r > 0$ und

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\beta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{i\beta} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

a) $\phi(U)$ ist eine Drehung um die x_2-Achse um den Winkel 2α

b) $\phi(V)$ ist eine Drehung um die x_3-Achse um den Winkel 2β

c) $\phi(B)$ ist ein Boost in x_3-Richtung, d.h.

$$\phi(B) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{pmatrix}$$

für ein $t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 11

Sei $\Lambda \in \mathrm{O}(3, 1)$ zukunftserhaltend, d.h. es gilt $d(e_0, \Lambda e_0) > 0$. Zeigen Sie, dass $U, V \in \mathrm{O}(3)$ und ein Boost B um t in x_3-Richtung existieren, für die gilt:

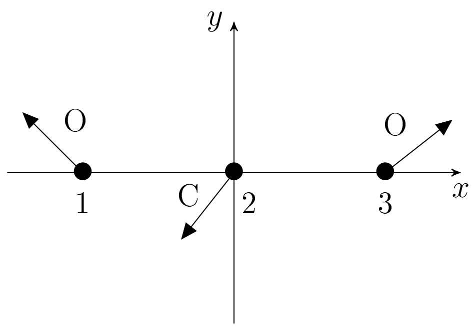
$$\Lambda = UBV$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst Λe_0 und finden Sie U und B mit $B^{-1}U^{-1}\Lambda e_0 = e_0$.

Aufgabe 12

CO_2 ist ein lineares Molekül, bei dem sich im Grundzustand das Kohlenstoffatom in der Mitte zwischen den beiden Sauerstoffatomen befindet. Die Symmetriegruppe des Systems (die sog. Vierergruppe V_4) hat 4 Elemente: die Identität (I), Spiegelungen an der x- bzw. y-Achse (σ_x und σ_y) und die Rotation um 180° um den Ursprung (R).

Eine koplanare Vibration ist eine Verschiebung der 3 Atome in einer festen Ebene und kann durch einen Vektor $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) \in \mathbb{R}^6$ beschrieben werden.



Bestimmen Sie die Wirkung der Symmetriegruppe auf der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^6$ und geben Sie die dadurch definierte 6-dimensionale Darstellung von V_4 an. Ist diese irreduzibel?