Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart Wintersemester 10/11

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 7 (Abgabe am 25.11.)

Aufgabe 22

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $P : V \to V$ ein linearer Operator mit $P^2 = P$.

a) Zeigen Sie, dass Unterräume U, W existieren mit $V = U \oplus W$, $P|_U = 1$ und $P|_W = 0$.

Zusätzlich habe V ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und es gelte $P^\dagger = P$.

b) Zeigen Sie, dass $U = W^\perp$ gilt.

Aufgabe 23

Betrachten Sie die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}_3 = \{e, a, a^{-1}\}$.

a) Wieviele irreduzible Darstellungen hat $\mathbb{Z}_3$, was sind deren Dimensionen, und wie oft kommen sie in der regulären Darstellung vor?

b) Zeigen Sie, dass
$$e_1 = \frac{1}{3}(e + a + a^{-1})$$
ein primitives Idempotent ist und die triviale Darstellung erzeugt.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung
$$e_2 = xe + ya + za^{-1}$$
alle primitiven Idempotente.

d) Finden Sie für die primitiven Idempotente heraus, ob diese äquivalente oder nicht-äquivalente Darstellungen erzeugen.

e) Geben Sie alle minimalen Linksideale an, und konstruieren Sie die dazugehörigen irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{Z}_3$. Fassen Sie letztere in einer Tabelle zusammen.

Aufgabe 24

Auf $V = \mathbb{C}^2$ operiere die zweidimensionale, irreduzible Darstellung von $D_3 \cong S_3$ (vgl. 2.4.1). Auf $W = V \otimes V$ betrachten wir die Produktdarstellung.

Zerlegen Sie W mit Hilfe der verallgemeinerten Projektionsoperatoren in irreduzible Unterräume und bestimmen Sie die Clebsch-Gordan Koeffizienten.

Aufgabe 25

Für $\sigma \in S_n$ und $j = 1, \ldots, n$ sei $k_j(\sigma)$ die Anzahl der Zykel der Länge j in σ, zum Beispiel ist $k_1(I) = n$ und $k_j(I) = 0$ für $j > 1$.

Zeigen Sie:

a) Die Konjugationsklasse von σ ist durch diese Zykelstruktur bestimmt, also

$$[\sigma] := \{\tau\sigma\tau^{-1} : \tau \in S_n\} = \{\tau \in S_n : k_j(\tau) = k_j(\sigma), j = 1, \ldots, n\}\,.$$

b) Die Anzahl der Elemente in einer Klasse ist

$$|[\sigma]| = \frac{n!}{\prod\limits_{j \le n} k_j! j^{k_j}}\,.$$