Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart

Wintersemester 10/11

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 9 (Abgabe am 09.12.)

Aufgabe 30

Die Exponentialfunktion einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{e}^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \,.$$

Zeigen Sie

a) Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.
Hinweis: Verwenden Sie auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ die Operatornorm

$$\|A\| := \sup_{v\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{|Av|}{|v|} \,.$$

In dieser Norm gilt: $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

b) Ist $T \in \mathrm{GL}(n)$, so gilt $\mathrm{e}^{TAT^{-1}} = T\mathrm{e}^A T^{-1}$.

c) e^{tA} ist die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{X}(t) = AX(t)$, $X(0) = \mathbb{1}$.

d) Für $t, s \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{e}^{(t+s)A} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{sA}$.

e) $\left(\mathrm{e}^A\right)^\dagger = \mathrm{e}^{A^\dagger}$.

f) $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$.

Aufgabe 31

Sei $x \in S^2$ ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^3$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Mit σ_i seien für $i = 1, \dots, 3$ wieder die Pauli Matrizen bezeichnet und es sei

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix} \,.$$

Rechnen Sie nach, dass

$$\exp\left(-\mathrm{i}\tfrac{\varphi}{2}\vec{\sigma}\cdot x\right) = \mathbb{1}\cos\tfrac{\varphi}{2} - \mathrm{i}\vec{\sigma}\cdot x \sin\tfrac{\varphi}{2} \,,$$

und dass $\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}\vec{\sigma}\cdot x\right) \in \mathrm{SU}(2)$.

Aufgabe 32

Wir definieren $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \operatorname{tr} A = 0\}$. Dann ist die Exponentialfunktion von Matrizen (siehe Aufgabe 30) eine Abbildung

$$\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix
$$S_a = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
genau dann im Bild von exp ist wenn $a = 0$ ist.

b) Ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ kompakt?

Aufgabe 33

Im Quarkmodell bestehen Baryonen aus drei Quarks. Diese werden z.B. durch die Quantenzahlen für I (Isospin) und Y (Hyperladung) charakterisiert.
Es sind $(I,Y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ für das Up-Quark ($|u\rangle$), $(I,Y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ für das Down-Quark ($|d\rangle$) und $(I,Y) = \left(0, -\frac{2}{3}\right)$ für das Strange-Quark ($|s\rangle$). Für Produkte wie $|udd\rangle$ sind die Werte von I und Y durch die Summe der Werte der einzelnen Quarks gegeben.

Für Kombinationen aus 3 Quarks haben wir also einen 27-dimensionalen Raum V, auf dem eine Darstellung von S_3 operiert.

a) Welche irreduziblen Darstellungen kommen in dieser vor und wie oft?

b) Sei $U \subset V$ ein Unterraum, der sich unter einer irreduziblen Darstellung transformiert. Was können Sie über die Werte von I und Y auf U aussagen?

c) Zeichnen Sie in einem (I,Y)-Diagramm Punkte ein, die den Vektoren entsprechen, die sich in der Darstellung $\ydiagram{3}$ transformieren.

Zusatzaufgabe

d) Wiederholen Sie Aufgabenteil c) für die Darstellung $\ydiagram{2,1}$. MAPLE-Code dazu können Sie auf der Vorlesungshomepage herunterladen.