Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart Wintersemester 10/11

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 5 (Abgabe am 11.11.)

Aufgabe 16

Sei G eine endliche Gruppe, $|G| = n$. Wir nummerieren die Gruppenelemente durch, $G = \{g_j, j = 1 \dots n\}$, bezeichnen mit m die Anzahl der Konjugationsklassen c (mit n_c Elementen) und mit p die Anzahl der nicht äquivalenten, irreduziblen Darstellungen Γ^i von G (mit Dimension d_i).

Betrachten Sie die Matrix U mit Einträgen $u_{ja} = \sqrt{\frac{d_{i_a}}{n}}\Gamma^{i_a}(g_j)_{\mu_a\nu_a}$ mit einem Tripel $a = (i_a, \mu_a, \nu_a)$.

Verwenden Sie die Ergebnisse aus Kapitel 2.5 und 2.6, um die folgenden Aufgaben der Reihe nach zu bearbeiten.

a) Bestimmen Sie die Dimensionen von U und drücken Sie die Orthogonalitätsbeziehung für irreduzible Darstellungen (Satz 6) durch U aus.

b) Beweisen Sie die Relationen

(i) $$\sum_{i\leq p} d_i \operatorname{tr}\left(\Gamma^i(g_j)\Gamma^i(g_k)^\dagger\right) = n\delta_{jk},$$

(ii) $$\sum_{g\in c} d_i\Gamma^i(g) = n_c\chi_c^i\mathbb{1} \text{ und}$$

(iii) $$\sum_{i\leq p} n_c\chi_c^i(\chi_{c'}^i)^* = n\delta_{cc'}.$$

c) Folgern Sie, dass $m = p$ gilt.

Aufgabe 17 (Fortsetzung von Aufgabe 15)

Bestimmen Sie, bis auf Äquivalenz, alle irreduziblen Darstellungen von D_4:

a) In welchen Dimensionen hat D_4 irreduzible Darstellungen?

b) Bestimmen Sie die eindimensionalen, irreduziblen Darstellungen.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst irreduzible Darstellungen der Faktorgruppen, und denken Sie an Aufgabe 9.

c) Bestimmen Sie die Charaktertafel sowie die verbleibenden Darstellungen.