Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jonas Lampart Wintersemester 10/11

Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik

Übungsblatt 6 (Abgabe am 18.11.)

Aufgabe 18
Drei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen definieren eine Darstellung D von S_3 auf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^8$ als Permutationen der Teilchen, also z.B. $D\left((12)\right)|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$.

Welche irreduziblen Darstellungen von S_3 sind in D enthalten und wie oft kommen sie jeweils vor?

Aufgabe 19
Sei

$$g = \begin{pmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{pmatrix} \qquad u, v \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |u|^2 + |v|^2 = 1\,.$$

a) Verifizieren Sie, dass $g \in \mathrm{SU}(2)$.

Die in der Vorlesung definierten Basisvektoren $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ von $\mathbb{C}^2$ transformieren sich unter der zweidimensionalen Darstellung $\Gamma^2(g) = g \ \forall\ g \in \mathrm{SU}(2)$.

b) Schreiben Sie $\Gamma^2(g)|\uparrow\rangle$ und $\Gamma^2(g)|\downarrow\rangle$ als Linearkombination von $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$.

Wir betrachten nun $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ mit der Produktbasis $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$ etc. (vgl. Vorlesung). Diese transformiert sich unter $\Gamma^{2\otimes 2}(\mathrm{SU}(2))$.

c) Entwickeln Sie $\Gamma^{2\otimes 2}|\uparrow\uparrow\rangle$ etc. in die Produktbasis.

d) Zeigen Sie: $\mathrm{span}(|0,0\rangle)$ und $\mathrm{span}(|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle)$ (definiert in der Vorlesung) sind invariant unter $\mathrm{SU}(2)$, tragen also ein- und dreidimensionale Darstellungen von $\mathrm{SU}(2)$, $\Gamma^{2\otimes 2} = \Gamma^1 \oplus \Gamma^3$.

e) Bestimmen Sie explizit die Darstellungsmatrizen $\Gamma^1(g)$ und $\Gamma^3(g)$.

Auf $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ operiert wie in Aufgabe 18 auch eine Darstellung D von $S_2 \cong \mathbb{Z}_2 = \{I, (12)\}$.

f) Unter welchen Darstellungen von S_2 transformieren sich die Vektoren $|1,1\rangle, |1,0\rangle$, $|1,-1\rangle$ und $|0,0\rangle$?

Aufgabe 20

Wir betrachten einen rotationsinvarianten Hamiltonoperator. Sein Eigenraum V_E zum Eigenwert E werde von den Kugelflächenfunktionen $Y_{1,m}(\varphi, \vartheta) = \cos\vartheta \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ mit einem festen radialen Anteil R aufgespannt: $V_E = \mathrm{span}\,\{R(r)Y_{1,m}(\varphi,\vartheta) : m = -1, \dots, 1\}$.

Auf V_E ist durch $\left(\Gamma(U)\psi\right)(x) = \psi(U^{-1}x)$ eine irreduzible, 3-dimensionale Darstellung von O(3) definiert. Diese hat die zu S_3 isomorphe Untergruppe $D_3 = \{I, C, \bar{C}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, wobei $C, \bar{C}$ Drehungen um die z-Achse sind (vgl. 2.4.1).

Untersuchen Sie den Effekt von Störungen, die nur unter D_3 oder $\mathbb{Z}_3 \cong \{I, C, \bar{C}\}$ invariant sind. Bestimmen Sie die vorkommenden irreduziblen Darstellungen mit ihrer Multiplizität und skizzieren Sie die möglichen Aufspaltungen der Energieniveaus.

Aufgabe 21

Seien V, W endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichne die Menge der linearen Abbildungen von V nach W und $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ den Dualraum von V.

Für diese Aufgabe definieren wir das Tensorprodukt von V und W (über $\mathbb{K}$) nicht über Basen, sondern als den Vektorraum $V \otimes W$ mit folgender universellen Eigenschaft:

Es existiert eine bilineare Abbildung $\eta : V \times W \to V \otimes W$, so dass für jeden Vektorraum X und jede bilineare Abbildung $\phi : V \times W \to X$ genau eine lineare Abbildung $T_\phi : V \otimes W \to X$ existiert, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta"'] & X \\
V \otimes W \arrow[ur, "\exists! T_\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Verwenden Sie diese Eigenschaft, indem Sie X und ϕ geeignet (und möglichst einfach wie z.B. $X = \mathbb{K}$) wählen, und zeigen Sie:

a) $V \otimes W = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\eta(v, w) : (v, w) \in V \times W\}$

b) $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$
Hinweis: Wählen Sie Basen $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ von V und $\{w_j\}_{j=1,\dots,m}$ von W und definieren Sie $\phi : V \times W \to \mathbb{C}^{n\times m}$ durch $\phi(v_i, w_j)_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

c) $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$

d) Betrachten Sie mit Teil c) $\xi \otimes w := \eta(\xi, w) \in V^* \otimes W$ als lineare Abbildung $V \to W$ und bestimmen Sie ihren Rang $\mathrm{rg}(\xi \otimes w)$. Geben Sie die darstellende Matrix in geeigneten Basen von V und W an.