

# Gruppen- und Darstellungstheorie mit Anwendungen in der Physik<sup>\*</sup>

**Stefan Keppeler** Universität Tübingen, Mathematisches Institut  
Auf der Morgenstelle 10  
72076 Tübingen, Germany

Büro: C6P43

Email-Adresse: stefan.keppeler@uni-tuebingen.de

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
1.1	Warum Gruppentheorie? Warum “mit Anwendungen in der Physik”?	4
1.2	Grundlegende Definitionen	5
1.3	Beispiele, weitere Eigenschaften & Ausblick	7
1.4	Die symmetrische (oder Permutations-) Gruppe	8
1.5	Wirkungen	10
1.6	Konjugationsklassen und invariante Untergruppen	12
1.7	Nebenklassen und Faktorgruppen	14
1.8	Direktes Produkt zweier Gruppen	16
1.9	Beispiel: Homomorphismus zwischen $SL(2, \mathbb{C})$ und der Lorentz-Gruppe	17
<b>2</b>	<b>Darstellungen</b>	<b>20</b>
2.1	Definitionen	20
2.2	Äquivalente Darstellungen	21
2.3	Beispiele und Invariante Unterräume	21
2.4	Irreduzible Darstellungen	24
2.4.1	$O_A$ Operatoren am Beispiel der Gruppe $D_3$	27
2.5	Schur’sche Lemmata und Orthogonalität irreduzibler Darstellungen	30
2.6	Charaktere von Darstellungen	33
2.7	Die reguläre Darstellung	36
2.8	Produkt Darstellungen und Clebsch-Gordan-Koeffizienten	39

---

<sup>\*</sup>Dies ist **kein** Vorlesungs-Skript sondern das Vorbereitungs material des Dozenten. Es wird parallel zu Vorlesung weitergeschrieben und baut auf einem (unveröffentlichten) Manuskript von Tilo Wettig (Uni Regensburg) auf, dem ich herzlich für die Überlassung danke. Für Hinweise auf (sicherlich vorhandene) Fehler jeglicher Art sowie für sonstige Anregungen bin ich dankbar. *Stefan Keppeler*

<b>3</b>	<b>Anwendungen in der Quantenmechanik</b>	<b>44</b>
3.1	Entwicklung in irreduzible Basisfunktionen . . . . .	44
3.2	Invarianz des Hamilton-Operators und Entartungen . . . . .	45
3.3	Störungstheorie und Aufhebung der Entartung . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Entwicklung in irreduzible Basisvektoren</b>	<b>51</b>
4.1	Projektionsoperatoren auf irreduzible Basen . . . . .	51
4.2	Irreduzible Operatoren und das Wigner-Eckart-Theorem . . . . .	55
4.3	Linksideale und Idempotente . . . . .	57
4.3.1	Dimensionen und Charaktere der irreduziblen Darstellungen . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Darstellungen der symmetrischen Gruppe und Young-Diagramme</b>	<b>63</b>
5.1	1-dimensionale und assoziierte Darstellungen von $S_n$ . . . . .	63
5.2	Young-Diagramme & Young-Tableaux . . . . .	65
5.3	Symmetrisierer und Antisymmetrisierer von Young-Tableaux . . . . .	67
5.4	Irreduzible Darstellungen von $S_n$ . . . . .	69
5.5	Berechnung von Charakteren mithilfe der Young-Diagramme . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Lie-Gruppen</b>	<b>74</b>
6.1	Topologische Gruppen . . . . .	74
6.2	Beispiel: $SO(2)$ . . . . .	76
6.3	Lie-Gruppen . . . . .	79
6.4	Lie-Algebren . . . . .	81
6.5	Mehr zu $SO(3)$ . . . . .	85
6.6	Invariante Integration: Das Haar-Maß . . . . .	87
6.6.1	Berechnung des Haar-Maßes von Lie-Gruppen . . . . .	88
6.7	Eigenschaften kompakter Lie-Gruppen . . . . .	91
6.8	Irreduzible Darstellungen von $SO(3)$ . . . . .	93
6.9	Bemerkung zu einigen klassischen Lie-Gruppen . . . . .	97
6.10	Weitere Begriffe zu Lie-Algebren . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Die Tensormethode zur Konstruktion irreduzibler Darstellungen von <math>GL(m)</math> und deren Untergruppen</b>	<b>104</b>
7.1	Tensoren und Tensorräume . . . . .	105
7.2	Wirkung der symmetrischen Gruppe auf dem Tensorraum . . . . .	106
7.3	Zerlegung des Tensorraums in irreduzible Unterräume bezüglich $S_n$ bzw. $GL(m)$ . . . . .	108
7.3.1	Symmetrieklassen im Tensorraum . . . . .	108
7.3.2	Total symmetrische und total antisymmetrische Tensoren . . . . .	109
7.3.3	Tensoren mit gemischter Symmetrie . . . . .	110
7.3.4	Vollständige Reduzierung des Tensorraums . . . . .	112
7.3.5	Dimensionen der $GL(m)$ -Darstellungen . . . . .	114
7.4	Irreduzible Darstellungen von $U(m)$ und $SU(m)$ . . . . .	116

7.5	Reduzierung des Produktes zweier irreduzibler Darstellungen . . . . .	118
7.6	Komplexkonjugierte Darstellungen . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Anwendungen in der Teilchenphysik</b>	<b>122</b>
8.1	Arten von Elementarteilchen . . . . .	122
8.2	SU(2)-Isospin . . . . .	123
8.3	SU(2)-Flavor . . . . .	124
8.4	SU(3)-Flavor und das Quarkmodell . . . . .	127
8.5	Gell-Mann-Okubo Formel . . . . .	132
<b>9</b>	<b>Darstellungen der Lorentz- und Poincaré-Gruppe</b>	<b>133</b>
9.1	Relativistische Kinematik / Notation . . . . .	133
9.2	Generatoren und Lie-Algebra der Lorentzgruppe . . . . .	134
9.3	Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe . . . . .	135
9.4	Die Poincaré-Gruppe . . . . .	137
9.5	Generatoren und Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe . . . . .	138
9.6	Unitäre irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe . . . . .	139
9.6.1	Erster Casimir-Operator und Wirkungen von $a$ und $\Lambda$ . . . . .	139
9.6.2	Kleine Gruppe und induzierte Darstellungen . . . . .	141
9.6.3	Zweiter Casimir-Operator und Lie-Algebra der kleinen Gruppe . . . . .	143
9.6.4	Massive Teilchen . . . . .	144
9.6.5	Masselose Teilchen . . . . .	144

# 1 Einführung

## 1.1 Warum Gruppentheorie?

### Warum “mit Anwendungen in der Physik”?

In der Physik verwendet man Methoden der Gruppen- und Darstellungstheorie zur Beschreibung von Symmetrien und deren Konsequenzen. Dabei kann man viel über ein physikalisches System lernen, ohne die Dynamik, d.h. die Bewegungsgleichungen, im Detail zu kennen oder gar zu lösen.

Wir werden mit grundlegenden Definitionen und Eigenschaften beginnen, vieles am Beispiel endlicher Gruppen, und uns in der zweiten Hälfte, v.a. bei den Lie-Gruppen, häufiger auf die Aspekte konzentrieren, die in bekannten physikalischen Anwendungen eine Rolle spielen.

Beispiele für Symmetrien in der Physik:

#### 1. Stetige Raum-Zeit Symmetrien

- (a) Homogenität des Raumes = Invarianz unter räumlichen Verschiebungen,  
 $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a} \rightsquigarrow$  Impulserhaltung
- (b) Homogenität der Zeit = Invarianz unter zeitlichen Verschiebungen,  
 $t \mapsto t + t_0 \rightsquigarrow$  Energieerhaltung
- (c) Isotropie des Raumes = Invarianz unter Rotationen,  
 $\vec{x} \mapsto R\vec{x} \rightsquigarrow$  Drehimpulserhaltung
- (d) Raum-Zeit Symmetrie = Invarianz unter Galilei- oder Lorentz- bzw. Poincaré-Transformationen (nicht-relativistisch oder relativistisch),  
 $(\vec{x}, t) \mapsto \Lambda(\vec{x}, t) + (\vec{a}, t_0) \rightsquigarrow$  Klassifizierung von Elementarteilchen nach Spin und Masse

#### 2. Diskrete Raum-Zeit Symmetrien:

- (a) Spiegelungen im Raum (Parität),  $\vec{x} \mapsto -\vec{x}$
- (b) Zeitumkehr,  $t \mapsto -t$
- (c) Diskrete Translationen auf einem Gitter
- (d) Diskrete Rotationssymmetrien eines Gitters (Punktgruppen)

#### 3. Permutationssymmetrie (Systeme von mehreren identischen Teilchen)

- 4. Eichinvarianz der Elektrodynamik (klassisch und QED)  $\rightsquigarrow$  Ladungserhaltung
- 5. Interne Symmetrien in Kern- und Teilchenphysik (Spin, Isospin, Farbe, etc.)  
 $\rightsquigarrow$  Teilchenspektrum (z.B. Entartungen im Spektrum)

## 1.2 Grundlegende Definitionen

**Definition:** (Gruppe)

Sei  $G \neq \emptyset$  eine Menge und  $\circ$  eine Verknüpfung  $\circ : G \times G \rightarrow G$ .

$(G, \circ)$  heißt Gruppe, falls gilt:

(G1)  $a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$  (Abgeschlossenheit)

(natürlich bereits implizit in  $\circ : G \times G \rightarrow G$ )

(G2)  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \forall a, b, c \in G$  (Assoziativität)

(G3)  $\exists I \in G$  mit  $a \circ I = a = I \circ a \forall a \in G$  (Identität / neutrales Element)

(G4) für jedes  $a \in G \exists a^{-1} \in G$  mit  $a \circ a^{-1} = I = a^{-1} \circ a$  (Inverses)

Wenn klar ist, welche Verknüpfung gemeint ist (oder wenn es gerade keine besondere Rolle spielt), werde ich statt  $(G, \circ)$  auch oft einfach  $G$  schreiben.

**Definition:** (abelsche Gruppe)

Eine Gruppe  $(G, \circ)$  heißt kommutativ oder abelsch, falls zusätzlich gilt:

(G5)  $a \circ b = b \circ a \forall a, b \in G$  (Kommutativität)

**Bemerkungen:**

1. Das neutrale Element  $I$  ist eindeutig bestimmt.
2. Zu jedem  $a \in G$  ist das inverse Element eindeutig bestimmt.
3. Oft nennen wir die Verknüpfung Multiplikation und schreiben  $a \cdot b$  oder einfach  $ab$  statt  $a \circ b$ .
4. Ist die Anzahl der Gruppenelemente endlich, so sprechen wir von einer *endlichen Gruppe* und nennen die Anzahl der Gruppenelemente die *Ordnung*  $|G|$  der Gruppe (ansonsten: unendliche Gruppe).
5. Eine endliche Gruppe (Ordnung  $n$ ) ist durch ihre *Multiplikationstafel* (mit  $n^2$  Elementen) vollständig bestimmt:

	$I$	$a$	$b$	$c$	$\dots$
$I$	$I$	$a$	$b$	$c$	$\dots$
$a$	$a$	$a^2$	$ab$	$ac$	$\dots$
$b$	$b$	$ba$	$b^2$	$bc$	$\dots$
$c$	$c$	$ca$	$cb$	$c^2$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

**Es gilt:** Alle Elemente in einer Zeile (oder Spalte) der Multiplikationstafel müssen unterschiedlich sein. (Beweis in den Übungen)

Daraus folgt das *Umordnungstheorem*: Multipliziert man alle Elemente einer Gruppe  $\{I, a, b, c, \dots\}$  mit einem der Elemente, so erhält man wieder alle Gruppenelemente, i.A. aber in einer anderen Reihenfolge.

**Beispiele:**

1.  $(\mathbb{Z}, +)$ :  $I = 0$ ,  $a^{-1} = -a$  für  $a \in \mathbb{Z}$  (abelsch); analog  $(\mathbb{R}, +)$  oder  $(\mathbb{C}, +)$
2.  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ :  $I = 1$ ,  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  für  $x \in \mathbb{R}$  (abelsch); analog  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  oder  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
3.  $G$ : Menge aller Symmetrieoperationen (Drehungen, Spiegelungen etc.), die ein bestimmtes Objekt (Atom, Molekül, geometrisches Objekt<sup>2</sup>...) invariant lassen.  
 $\circ$ : Nacheinanderausführen der Operationen.  
 $G$  kann endlich sein (z.B. für einen Würfel) oder unendlich (z.B. für eine Kugel) – i.A. nicht abelsch.

**Definition:** (Untergruppe)

Sei  $(G, \circ)$  eine Gruppe. Eine Teilmenge  $H \subseteq G$ , die (G1)–(G4) erfüllt (mit der gleichen Verknüpfung  $\circ$ ), heißt Untergruppe von  $G$ .

**Bemerkungen:**

1. Jede Gruppe hat zwei triviale Untergruppen:  $\{I\}$  und  $G$ .  
Alle anderen Untergruppen heißen nichttrivial.
2.  $|G|$  (falls endlich) ist durch  $|H|$  teilbar. (Beweis später)

**Definition:** (Homomorphismus)

Seien  $(G, \circ)$  und  $(G', \bullet)$  Gruppen. Eine Abbildung  $f : G \rightarrow G'$  heißt Homomorphismus, falls gilt

$$f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b) \quad \forall a, b \in G.$$

**Bemerkungen:**

1. Ein Homomorphismus  $f$  bildet die Identität auf die Identität und Inverse auf Inverse ab, genauer  $f(I_G) = I_{G'}$  und  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \quad \forall a \in G$ .
2. Das *Bild* des Homomorphismus  $f : G \rightarrow G'$  ist

$$\text{Bild}(f) = f(G) = \{f(g) : g \in G\},$$

der *Kern* von  $f$  das Urbild der Identität von  $G'$ ,

$$\text{Kern}(f) = \{g \in G : f(g) = I_{G'}\}.$$

**Definition:** (Isomorphismus)

Ein bijektiver Homomorphismus  $f : G \rightarrow G'$  heißt Isomorphismus. Man sagt dann  $G$  und  $G'$  sind isomorph zueinander und schreibt  $G \cong G'$ .

**Bemerkungen:**

1. Isomorphe Gruppen haben dieselbe Multiplikationstafel, d.h. sie sind bis auf die Bezeichnung der Gruppenelemente gleich. (sinngemäß auch für unendliche Gruppen)

---

<sup>2</sup>Für eine Matratze, d.h. für ein Rechteck, erhalten wir die *Kleinsche Vierergruppe*, vgl. <https://forum.zdv.uni-tuebingen.de/viewtopic.php?f=51&t=434>.

### 1.3 Beispiele, weitere Eigenschaften & Ausblick

1. Eine Gruppe mit der Struktur  $\{I, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ , wobei  $a^n = I$ , heißt *zyklische Gruppe*  $C_n$ .  
Die kleinste nichtzyklische Gruppe hat Ordnung 4.  
Die kleinste nichtabelsche Gruppe hat Ordnung 6.
2. Gruppe mit 2 Elementen:  $\mathbb{Z}_2 = \{I, A\}$   
Es gilt:  $I^2 = I$ ,  $IA = A$  und  $AI = A$ .  
Bleibt:  $A^2 = ?$  ( $A$  oder  $I$ )  
Multiplikationstafel:

	I	A
I	I	A
A	A	I

... einzige Möglichkeit, da keine zwei gleichen Elemente in einer Zeile/Spalte (s.o.)  
 $\Rightarrow$  Alle Gruppen der Ordnung 2 sind isomorph zu  $\mathbb{Z}_2$ .

3. Beispiele für zu  $\mathbb{Z}_2$  isomorphe Gruppen:
  - (a) Betrachte die folgenden beiden Abbildungen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$I : \vec{x} \mapsto \vec{x},$$

$$P : \vec{x} \mapsto -\vec{x} \quad (\text{Spiegelung, Parität}).$$

Multiplikation definiert als aufeinanderfolgende Transformationen  
 $\Rightarrow I^2 = I$ ,  $IP = P$ ,  $PI = P$ ,  $P^2 = I$ , also isomorph zu  $\mathbb{Z}_2$ .

- (b) Statt der beiden räumlichen Transformationen betrachten wir nun Operatoren, die auf reell- oder komplexwertige Funktionen von  $\vec{x}$  wirken:

$$(O_I f)(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

$$(O_P f)(\vec{x}) = f(-\vec{x})$$

$\Rightarrow O_I^2 = O_I$ ,  $O_I O_P = O_P$ ,  $O_P O_I = O_P$ ,  $O_P^2 = O_I$ , also isomorph zu  $\mathbb{Z}_2$ .

**Bemerkung:** Die Operatoren  $O_I$  und  $O_P$  sind linear, d.h.

$$O(\alpha f + \beta g) = \alpha O(f) + \beta O(g).$$

- (c) Betrachte Operatoren, die auf die komplexwertige Funktionen von zwei Variablen wirken (Physik: Wellenfunktion zweier Teilchen)

$$(O_E \psi)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

$$(O_S \psi)(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1)$$

$O_E^2 = O_E \dots \Rightarrow \{O_E, O_S\} \cong \mathbb{Z}_2$

(andere Namen für die Operatoren als in Beispiel 3b um die unterschiedlichen Realisierungen zu betonen)

Wenn wir die Begriffe Wirkung und Darstellung kennengelernt haben, können wir diese Beispiele auch noch anders interpretieren als nur unter dem Gesichtspunkt Isomorphie.

$\mathbb{Z}_2$  sieht auf den ersten Blick trivial aus, aber viele Konzepte, die wir im Folgenden behandeln möchten, können wir bereits exemplarisch für  $\mathbb{Z}_2$  betrachten.

4. Betrachte nun das Beispiel 3b und zwei Funktionen  $f_e$  und  $f_o$ , für die gilt

$$\begin{aligned} (O_P f_e)(\vec{x}) &= f_e(\vec{x}) & (f_e \text{ hat "gerade Parität" - "even"}) \\ (O_P f_o)(\vec{x}) &= -f_o(\vec{x}) & (f_o \text{ hat "ungerade Parität" - "odd"}) \end{aligned}$$

(z.B.  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$   $f_e = x^2 + yz$ ,  $f_o = xy \sin(z)$ )

$f_e$  und  $f_o$  haben spezielle Eigenschaften unter Anwendung der Gruppe  $\{O_I, O_P\}$ :

- $f_e$  ist invariant unter  $O_P$
- $f_o$  wechselt unter  $O_P$  lediglich das Vorzeichen

Gruppentheoretische Anwendungen in der Physik (v.a. Quantentheorie) nutzen aus, dass bestimmte Objekte (Atome, Moleküle, Elementarteilchen) bestimmte Symmetrieeigenschaften haben – Symmetrieeoperationen bilden Symmetriegruppe... (i.A. viel komplizierter als in diesem einfachen Beispiel)

5. Die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_e^*(\vec{x}) f_o(\vec{x}) d^d x = 0$$

ist ein Beispiel für eine “Orthogonalitätsrelation” zwischen Objekten mit speziellen Symmetrieeigenschaften (in der QM auch “Auswahlregel” genannt; später mehr).

6. Eine beliebige Funktion kann als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f &= f_e + f_o \quad \text{mit} \quad f_e = \frac{1}{2}[f(x, y, z) + f(-x, -y, -z)] \\ & \quad f_o = \frac{1}{2}[f(x, y, z) - f(-x, -y, -z)]. \end{aligned}$$

Dies ist ein Beispiel für ein “Entwicklungstheorem”:

Objekte ohne spezielle Symmetrieeigenschaften können als Linearkombinationen der Objekte mit speziellen Symmetrieeigenschaften ausgedrückt werden (d.h. in diesen entwickelt werden).

## 1.4 Die symmetrische (oder Permutations-) Gruppe

**Definition:** (Symmetrische Gruppe)

Die symmetrische Gruppe  $S_n$  ist die Gruppe der Permutationen von  $n$  Objekten, d.h. der bijektiven Abbildungen von  $\{1, 2, \dots, n\}$  auf sich selbst. Die Verknüpfung ist die Verkettung.



### Bemerkungen:

1.  $|S_n| = n!$
2. Die **Notation**

$$S_n \ni p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

bedeutet: "Bringe das erste Element in Position  $p_1$ , das zweite Element in Position  $p_2$ , etc.", z.B. für  $n = 6$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ angewandt auf } [a, b, c, d, e, f] = [c, d, f, b, e, a]$$

3. Eine Permutation kann in *disjunkte Zyklen* zerlegt werden, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = (163)(24)(5) \quad \text{3-Zykel, 2-Zykel, 1-Zykel}$$

- Der 3-Zykel bedeutet "1 geht nach 6, 6 geht nach 3, 3 geht nach 1".
- Innerhalb eines Zyklus können die Zahlen zyklisch vertauscht werden, z.B.

$$(163) = (631) = (316) \text{ aber } \neq (136).$$

- Disjunkte Zyklen vertauschen, z.B.  $(163)(24) = (24)(163)$ .
- Die 1-Zyklen werden meist weggelassen.
- Jeder  $\ell$ -Zykel ( $\ell > 2$ ) kann als Produkt von 2-Zykeln (Transpositionen) geschrieben werden, z.B.

$$(163) = (13)(16).$$

Der Zykel auf der rechten Seite wird zuerst angewandt.

### Beispiele

1.  $S_2 = \{I, (12)\} \cong \mathbb{Z}_2$
2.  $S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ 
  - Multiplikationstafel: Übungen.
  - $S_3$  ist eine nichtabelsche Gruppe (die kleinste), wie alle  $S_n$  mit  $n \geq 3$ , denn z.B.

$$(12)(13) = (132) \neq (13)(12) = (123).$$

- Untergruppen:  $\{I\}$  und  $S_3$  (trivial)  
 $\{I, (12)\}, \{I, (13)\}, \{I, (23)\}$ , alle  $\cong \mathbb{Z}_2$   
 $\{I, (123), (321)\} \cong C_3$

**Satz 1. (Satz von Cayley)**

Jede Gruppe der Ordnung  $n$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $S_n$

**Beweis:**

Schreibe Beweis etwas unorthodox unter Verwendung der Eigenschaften der Multiplikationstafel, um ÜA 1 nicht zu entwerten.

Sei  $(G, \cdot)$  eine endliche Gruppe,  $|G| = n$ . Für  $h \in G$  definiere

$$\begin{aligned}\varphi_h : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto \varphi_h(g) = h \cdot g\end{aligned}$$

$\varphi_h$  permutiert die  $n$  Elemente von  $G$  (liefert nämlich eine Zeile der Multiplikationstafel von  $G$ ). Weiter ist

$$\begin{aligned}f : g &\mapsto \varphi_g \\ G &\rightarrow G' := \{\varphi_g : g \in G\}\end{aligned}$$

ein Homomorphismus, denn

$$(\varphi_a \circ \varphi_b)(g) = \varphi_a(\varphi_b(g)) = \varphi_a(b \cdot g) = a \cdot b \cdot g = \varphi_{a \cdot b}(g),$$

und  $f$  ist injektiv (sonst zwei gleiche Zeilen in der Multiplikationstafel von  $G$ ), d.h.  $G \cong G'$ . Andererseits enthält  $G'$  nur Permutationen der  $n$  Elemente von  $G$ , d.h.  $G'$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $S_n$ .  $\square$

## 1.5 Wirkungen

**Definition:** (Wirkung)

Sei  $G$  eine Gruppe und  $M$  eine Menge. Eine Wirkung von  $G$  auf  $M$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}G \times M &\rightarrow M \\ (g, m) &\mapsto gm,\end{aligned}$$

für die gilt

$$\begin{aligned}Im &= m \quad \forall m \in M \quad \text{und} \\ g(hm) &= (gh)m \quad \forall g, h \in G \text{ und } \forall m \in M.\end{aligned}$$

**Bemerkung:**

1. Damit ist  $M \rightarrow M$ ,  $m \mapsto gm$ , bijektiv für jedes  $g \in G$ , denn  $gm_1 = gm_2 \Rightarrow g^{-1}gm_1 = g^{-1}gm_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$  (injektiv) und  $m \in M \Rightarrow gm' = m$  mit  $m' = g^{-1}m$  (surjektiv).

**Definition:** (Bahn / Orbit)

Der Orbit (oder die Bahn) eines Punktes  $m \in M$  unter einer Wirkung von  $G$  auf  $M$  ist

$$Gm := \{gm : g \in G\}$$

**Bemerkungen:**

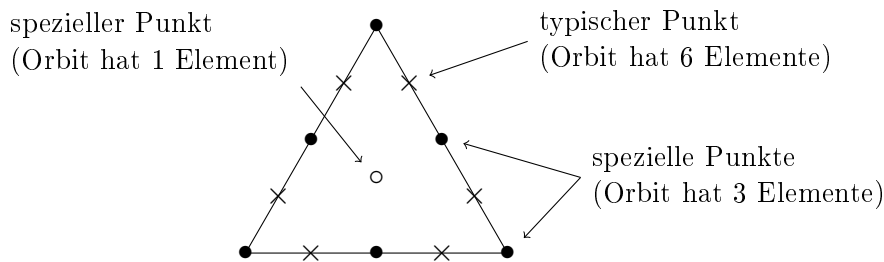
1. Der Orbit "typischer" Punkte hat  $n = |G|$  Elemente.
2. Der Orbit "spezieller" Punkte hat weniger als  $n = |G|$  Elemente.

**Beispiel:**

Betrachte  $D_3$ , die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks ("D" für Diedergruppe).  $D_3 \cong S_3$ , den Permutationen der Eckpunkte des Dreiecks.

- Gruppenelemente:
- Identität
  - 2 Drehungen (um  $120^\circ$  und  $240^\circ$ )
  - 3 Spiegelungen (Achsen jeweils durch einen der Eckpunkte)

$D_3$  operiert (wirkt) in natürlicher Weise auf  $M$ , der Ebene mit dem Mittelpunkt des Dreiecks als Ursprung.



**Definition:** (Isotropiegruppe)

Sei  $G \times M \rightarrow M, (g, m) \mapsto gm$  eine Wirkung von  $G$  auf  $M$ . Die Menge der Gruppenelemente, die ein  $m \in M$  auf sich selbst abbilden, also

$$G_m = \{g \in G : gm = m\},$$

heißt Isotropiegruppe oder Standgruppe<sup>3</sup> von  $m$ .

**Bemerkung:**  $G_m$  ist eine Gruppe (Beweis in den Übungen).

Im obigen **Beispiel:**

- die Isotropiegruppe von  $\times$  ist  $\{I\}$
- die Isotropiegruppe von  $\circ$  ist  $D_3$
- die Isotropiegruppe von  $\bullet$  ist  $\{I, \sigma\} \cong \mathbb{Z}_2$ , wobei  $\sigma$  die Spiegelung um die Achse ist, die durch  $\bullet$  geht

Wir beobachten, dass in allen Fällen  $|Gm| \cdot |G_m| = |G|$ . Dies gilt auch allgemein für endliche Gruppen (*Bahnformel*, Beweis in den Übungen).

<sup>3</sup>auch Stabilisator, Fixgruppe oder kleine Gruppe

## 1.6 Konjugationsklassen und invariante Untergruppen

**Definition:** (Konjugation)

Sei  $G$  eine Gruppe.  $x \in G$  heißt konjugiert zu  $y \in G \stackrel{\text{Def.}}{\iff} \exists g \in G : y = gxg^{-1}$ .  
Wir schreiben dann  $x \sim y$ .

**Bemerkung:**

$\sim$  definiert eine Äquivalenzrelation, denn

1.  $x \sim x \forall x \in G$  (Reflexivität).
2.  $x \sim y \iff y \sim x$  (Symmetrie)
3.  $x \sim y$  und  $y \sim z \Rightarrow x \sim z$  (Transitivität)

**Beispiele:**

1.  $G = S_3$ :  $(13) \sim (12)$ , da  $(23)(12)\underbrace{(23)^{-1}}_{=(23)} = (13)$

2.  $G = \text{SO}(3)$ , Drehgruppe in 3 Dimensionen:

- $R_{\vec{n}}(\phi)$  = Rotation um Achse  $\vec{n}$  und Winkel  $\phi$
- Für beliebiges  $R \in \text{SO}(3)$  gilt  $RR_{\vec{n}}(\phi)R^{-1} = R_{\vec{n}'}(\phi)$  mit  $\vec{n}' = R\vec{n}$ ,

d.h. Rotationen um denselben Winkel, aber verschiedene Achsen, sind konjugiert zueinander.

**Definition:** (Konjugationsklasse)

Sei  $G$  eine Gruppe,  $x \in G$ . Wir nennen  $\{gxg^{-1} : g \in G\}$  die Konjugationsklasse von  $x$ .

**Bemerkungen:**

1. Die Identität bildet allein eine Klasse, da  $gIg^{-1} = I \forall g$ .
2. Im Allgemeinen bilden die Elemente einer Klasse keine Gruppe (s.u.).
3. Bei abelschen Gruppen, bildet jedes Element allein eine Klasse, da  $gxg^{-1} = x \forall g$ .
4. Jedes Element von  $G$  gehört zu genau einer Klasse (wegen Transitivität, s.o.).
5. Die Ordnung der Gruppe ist durch die Anzahl der Elemente in einer Klasse teilbar (Bahnformel, vgl. Übungen).
6. Später: Die Anzahl der Klassen ist gleich der Anzahl nichtäquivalenter irreduzibler Darstellungen der Gruppe.

**Beispiel:  $S_3$** 

Die erste Klasse ist  $\{I\}$ .

Nun konjugiere (12) mit allen Elementen von  $S_3$ ,

$$\begin{aligned} I(12)I &= (12) \\ (12)(12)(12) &= (12) \\ (13)(12)(13) &= (1)(23) = (23) \\ (23)(12)(23) &= (13) \\ (123)(12)(321) &= (1)(23) = (23) \\ (321)(12)(123) &= (13) \end{aligned}$$

d.h. (12), (13) und (23) bilden eine Klasse.

Für die restlichen beiden Elemente gilt

$$\begin{aligned} I(123)I &= (123) \\ (12)(123)(12) &= (132) \end{aligned}$$

d.h. (123) und (132) sind äquivalent und daher in derselben Klasse.

Es gibt also 3 Klassen:

$$C_1 = \{I\}, \quad C_2 = \{(12), (13), (23)\}, \quad C_3 = \{(123), (321)\}.$$

Wir beobachten: Zwei Elemente von  $S_3$  sind zueinander konjugiert, wenn sie dieselbe Zyk-  
kelstruktur haben; gilt auch allgemein für  $S_n$  (später).

Für  $D_3 \cong S_3$ :  $C_2 = 3$  Spiegelungen,  $C_3 =$  Drehungen um  $120^\circ$  und  $240^\circ$ .

**Definition:** (Konjugierte Untergruppe, Normalteiler)

- (i) Eine Untergruppe  $K \subseteq G$  heißt konjugiert zu einer Untergruppe  $H \subseteq G$ , wenn ein  $g \in G$  existiert, so dass

$$K = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}.$$

- (ii) Falls  $ghg^{-1} \in H$  für alle  $h \in H$  und alle  $g \in G$ , dann ist  $H$  eine invariante Unter-  
gruppe bzw. ein Normalteiler<sup>4</sup> von  $G$ .

**Beispiele:**

1. Die Untergruppe  $K = \{I, (13)\} \subset S_3$  ist konjugiert zu  $H = \{I, (12)\}$ , da  $(23)I(23)^{-1} = I$  und  $(23)(12)(23)^{-1} = (13)$ .
2. Jede Gruppe  $G$  hat zwei triviale invariante Untergruppen:  $\{I\}$  und  $G$ .
3. Die einzige nichttriviale invariante Untergruppe von  $S_3$  ist  $\{I, (123), (132)\}$ .

**Bemerkung:** Eine endliche Gruppe heißt *einfach*, wenn sie keine nichttriviale invariante Untergruppe hat und *halbeinfach*, wenn sie keine abelsche invariante Untergruppe hat.

Damit ist  $S_3$  weder einfach noch halbeinfach.

---

<sup>4</sup>auch normale oder selbstkonjugierte Untergruppe

## 1.7 Nebenklassen und Faktorgruppen

**Definition:** (Nebenklassen)

Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Für  $g \in G$  heißt die Menge

$$gH := \{gh : | h \in H\}$$

Linksnebenklasse (*left coset*) von  $H$  in  $G$ . Analog heißt

$$Hg := \{hg : | h \in H\}$$

Rechtsnebenklasse (*right coset*) von  $H$  in  $G$ .

**Bemerkungen:**

1.  $gH, Hg \subseteq G$ .
2. Falls  $g \in H \Rightarrow gH = Hg = H$  (Umordnungstheorem, vgl. ÜA 1).
3. Die Anzahl der Elemente einer Nebenklasse ist gleich der Ordnung von  $H$ , kurz  $|gH| = |H|$ .
4. Betrachte im Folgenden meist nur Linksnebenklassen.
5. Zwei Nebenklassen  $g_1H$  and  $g_2H$  sind entweder identisch ( $\Leftrightarrow g_1^{-1}g_2 \in H$ ) oder disjunkt.

**Beweis:** Annahme: Sie haben ein gemeinsames Element, d.h.

$$\begin{aligned} \exists h_1, h_2 \in H : g_1h_1 &= g_2h_2 \\ \Leftrightarrow g_2 &= g_1h_1h_2^{-1} \\ \Rightarrow g_2H &= g_1h_1h_2^{-1}H = g_1H \quad \square \end{aligned}$$

6. Da jedes  $g \in G$  zu genau einer Nebenklasse gehört, und da  $|gH| = |H|$ , ist  $H$  Teiler von  $|G|$  (vgl. 1.2).<sup>5</sup>

**Beispiel:**

Für  $S_3$ : Sei  $H_1 = \{I, (12)\}$  (nicht invariant) und  $H_2 = \{I, (123), (132)\}$  (invariant).

- Links- und Rechtsnebenklassen von  $H_1$ :

$$\begin{array}{ll} IH_1 = \{I, (12)\} & H_1I = \{I, (12)\} \\ (12)H_1 = \{(12), I\} & H_1(12) = \{(12), I\} \\ (13)H_1 = \{(13), (123)\} & H_1(13) = \{(13), (132)\} \\ (123)H_1 = \{(123), (13)\} & H_1(132) = \{(132), (13)\} \\ (23)H_1 = \{(23), (132)\} & H_1(23) = \{(23), (123)\} \\ (132)H_1 = \{(132), (23)\} & H_1(123) = \{(123), (23)\} \end{array}$$

Die Links- und Rechtsnebenklassen sind **verschieden**, und (z.B.)

$$S_3 = H_1 \cup (13)H_1 \cup (23)H_1 .$$

---

<sup>5</sup>Alternativ hätten wir auch durch die Linksmultiplikation eine Wirkung von  $G$  auf  $G$  definieren und wieder mit der Bahnformel argumentieren können.

- Nebenklassen von  $H_2$ :

$$\begin{array}{ll}
 IH_2 = \{I, (123), (132)\} & H_2I = \{I, (123), (132)\} \\
 (123)H_2 = \{(123), (132), I\} & H_2(123) = \{(123), (132), I\} \\
 (132)H_2 = \{(132), I, (123)\} & H_2(132) = \{(132), I, (123)\} \\
 (12)H_2 = \{(12), (23), (13)\} & H_2(12) = \{(12), (13), (23)\} \\
 (13)H_2 = \{(13), (12), (23)\} & H_2(13) = \{(13), (23), (12)\} \\
 (23)H_2 = \{(23), (13), (12)\} & H_2(23) = \{(23), (12), (13)\}
 \end{array}$$

Die Links- und Rechtsnebenklassen sind **identisch**, und (z.B.)

$$S_3 = H_2 \cup (12)H_2$$

**Allgemein gilt:** Ist  $H$  eine invariante Untergruppe von  $G$ , so sind die Links- und Rechtsnebenklassen gleich, denn

$$gHg^{-1} = H \Leftrightarrow gH = Hg.$$

In diesem Fall ist die Partitionierung von  $G$  in Nebenklassen eindeutig.

Ist  $H$  invariant, so bilden die Nebenklassen eine neue Gruppe...

**Definition:** (Faktorgruppe)

Sei  $H$  eine invariante Untergruppe von  $G$ . Die Menge der Nebenklassen

$$G/H := \{gH : g \in G\}$$

(sprich " $G$  modulo  $H$ ") , bildet mit der Multiplikationsregel

$$(g_1H) \cdot (g_2H) = (g_1g_2)H$$

eine Gruppe, genannt Faktorgruppe, wobei  $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$ .

**Bemerkungen:**

1.  $(G/H, \cdot)$  ist tatsächlich eine Gruppe, denn

(G1) da  $g_1, g_2 \in G \Rightarrow (g_1g_2)H \in G/H$ ,

(G2) die Assoziativität von  $G$  überträgt sich auf  $G/H$ ,

(G3)  $I_{G/H} = H$ , denn  $gH \cdot H = gH = H \cdot gH$  und

(G4) das Inverse  $gH$  ist  $g^{-1}H$ , denn  $gH \cdot g^{-1}H = H = g^{-1}H \cdot gH$  .

2. Wo wurde die Invarianz von  $H$  (d.h.  $gHg^{-1} = H \forall g \in G$ ) benötigt? Ohne diese Eigenschaft ist die Verknüpfung  $\cdot$  i.A. gar keine wohldefinierte Abbildung  $G/H \times G/H \rightarrow G/H$ . Ersetzung von  $H$  durch  $hH$  mit  $h \in H$  darf das Ergebnis nicht ändern, aber

$$\begin{aligned}
 (g_1hH) \cdot (g_2H) &= (g_1hg_2)H \neq_{\text{i.A.}} (g_1g_2)H \\
 &= (g_1g_2g_2^{-1}hg_2)H
 \end{aligned}$$

Aber falls  $H$  invariant:  $g_2^{-1}hg_2 \in H$  und damit  $(g_1g_2g_2^{-1}hg_2)H = (g_1g_2)H$ .

### Beispiele:

- $H_2 = \{I, (123), (132)\} \subset S_3$  ist invariant. Die Faktorgruppe  $S_3/H_2$  hat die Elemente:

$$\{I, (123), (132)\} \quad \text{und} \quad \{(12), (13), (23)\}$$

und ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_2$ .

- $H_1 = \{I, (12)\} \subset S_3$  ist nicht invariant, da z.B.  $(123)(12)(123)^{-1} = (23) \notin H_1$ , und deshalb ist  $\cdot$  nicht wohldefiniert, denn z.B.

$$\begin{aligned} (IH_1)((13)H_1) &= (13)H_1 = \{(13), (123)\} \\ &\neq ((12)H_1) \cdot ((13)H_1) = (12)(13)H_1 = (132)H_1 = \{(132), (23)\} \end{aligned}$$

## 1.8 Direktes Produkt zweier Gruppen

### Definition: (Direktes Produkt)

Seien  $(A, \circ)$  und  $(B, \bullet)$  Gruppen. Ihr direktes Produkt ist das kartesische Produkt  $A \times B$  mit der Multiplikationsregel

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 \bullet b_2).$$

### Bemerkungen:

1.  $(A \times B, \cdot)$  ist eine Gruppe mit  $I_{A \times B} = (I_A, I_B)$  und  $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$ .
2. Für endliche Gruppen gilt  $|A \times B| = |A||B|$ .
3.  $G := A \times B$  hat eine zu  $A$  isomorphe invariante Untergruppe, nämlich

$$(A, I_B) := \{g \in G : g = (a, I_B) \text{ mit } a \in A\}.$$

Invarianz:  $a_1 \in A, (a_2, b_2) \in G$ ,

$$g(a_1, I_B)g^{-1} = (a_2, b_2)(a_1, I_B)(a_2^{-1}, b_2^{-1}) = (a_2 a_1 a_2^{-1}, b_2 I_B b_2^{-1}) = (\underbrace{a_2 a_1 a_2^{-1}}_{\in A}, I_B).$$

(ebenso für  $B$ )

Weiter ist  $A$  isomorph zu  $G/B$  (und umgekehrt):<sup>6</sup>

$$G/B = \{(a, b)B : (a, b) \in G\} = \{(a, B) : a \in A\} \quad (\text{Umordnungstheorem})$$

**Vorsicht:** Die Umkehrung gilt nicht: Wenn  $H$  eine invariante Untergruppe von  $G$  ist, dann ist i.A.  $G \neq H \times (G/H)$  (denn i.A. ist  $G/H$  keine invariante Untergruppe von  $G$ ).

**Beispiel:**  $S_3$  hat Untergruppen  $H_1 = \{I, (12)\}$  und  $H_2 = \{I, (123), (132)\}$

$H_2$  ist invariant

$S_3/H_2 \cong \mathbb{Z}_2 \cong H_1$ , aber  $S_3 \neq H_1 \times H_2$ , da  $H_1$  keine invariante Untergruppe ist, bzw. weil die Elemente von  $H_1$  und  $H_2$  nicht kommutieren

---

<sup>6</sup>Schreibe jetzt kurz  $B$  anstatt  $(I_A, B)$ .



## 1.9 Beispiel:

### Homomorphismus zwischen $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ und der Lorentz-Gruppe

- Sei  $M$  der Minkowski-Raum, d.h.  $M = \mathbb{R}^4$  mit Lorentz-Metrik<sup>7</sup>

$$\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2;$$

$x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  heißt Vierervektor.

- Eine homogene Lorentz-Transformation  $\Lambda$  ist eine lineare Abbildung  $M \rightarrow M$ , die die Lorentz-Metrik erhält, d.h.

$$\|\Lambda x\|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in M.$$

- Die Lorentz-Gruppe  $L = \mathrm{O}(3, 1)$  ist die Gruppe aller homogenen Lorentz-Transformationen.
- Identifiziere nun jedes  $x \in M$  mit einer hermiteschen  $2 \times 2$  Matrix:<sup>8</sup>

$$X := f(x) := x_0 I + x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 \quad \text{mit}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{d.h. } X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

Die  $\sigma_j$  heißen Pauli-Matrizen. Es folgt

$$\det X = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \|x\|^2.$$

- Sei nun  $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) := \{B \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \det B \neq 0\}$  (mit Matrixmultiplikation eine Gruppe). Definiere eine Wirkung von  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$  auf  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  durch

$$\mathbb{C}^{2 \times 2} \ni X \mapsto AXA^\dagger$$

und bezeichne die dadurch induzierte Wirkung auf  $M$  mit

$$M \ni x \mapsto \phi(A)x := f^{-1}(Af(x)A^\dagger).$$

- Es gilt  $(AXA^\dagger)^\dagger = AXA^\dagger$ , d.h.  $AXA^\dagger$  ist hermitesch und damit  $\phi(A)x$  wieder ein reeller Vierervektor. Weiter ist

$$\|\phi(A)x\|^2 = \det(AXA^\dagger) = |\det A|^2 \det X = |\det A|^2 \|x\|^2.$$

- Mit  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) := \{B \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \det B = 1\}$  gilt

$$\|\phi(A)x\|^2 = \|x\|^2,$$

d.h.  $\phi(A)$  entspricht einer Lorentz-Transformation.

<sup>7</sup>eigentlich  $\|x\|^2 = d(x, x)$  mit der Pseudo-Riemannschen Metrik  $d(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$

<sup>8</sup>Die hermiteschen  $2 \times 2$ -Matrizen bilden einen reellen 4-dimensionalen Vektorraum. Eine Basis dieses Raumes ist gegeben durch  $I$  und die drei Pauli-Matrizen.

- Außerdem gilt

$$\phi(A)\phi(B)x = \phi(A)f^{-1}(Bf(x)B^\dagger) = f^{-1}(ABf(x)B^\dagger A^\dagger) = \phi(AB)x,$$

d.h.  $\phi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{O}(3, 1)$  ist ein Homomorphismus.

- $\phi$  ist aber kein Isomorphismus, denn  $\phi(-A) = \phi(A)$ , d.h. die Matrizen  $A$  und  $-A$  werden auf dieselbe Lorentz-Transformation abgebildet.
- **Beispiele** (siehe Übungen):

1. Für die Matrix

$$U_\theta = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

ist  $\phi(U_\theta)$  eine Drehung um den Winkel  $2\theta$  um die  $x_3$ -Achse.

2. Für die Matrix

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

ist  $\phi(V_\alpha)$  eine Drehung um den Winkel  $2\alpha$  um die  $x_2$ -Achse.

3. Für die Matrix

$$M_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

ist  $\phi(M_r)$  ein Lorentz-Boost in  $x_3$ -Richtung mit Parameter  $2 \ln(r)$ .

Übrigens: Die Boosts alleine bilden keine Gruppe.

Der Homomorphismus  $\phi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{O}(3, 1)$  ist nicht surjektiv:

- Alle  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$  sind stetig mit  $I$  verbunden (ohne Beweis).
- Für Lorentz-Transformation gibt es folgende Möglichkeiten:
  - eigentliche Lorentz-Transformation:  $\det \Lambda = +1$
  - uneigentliche Lorentz-Transformation:  $\det \Lambda = -1$
  - orthochrone Lorentz-Transformation:  $\Lambda_{00} \geq 1$
  - nichtorthochrone Lorentz-Transformation:  $\Lambda_{00} \leq -1$
  - nur die eigentlichen, orthochronen Lorentz-Transformation sind stetig mit  $I$  verbunden. Diese bilden die Untergruppe  $L^0$ .
- Es gilt:  $\text{Bild}(\phi) = L^0$  (vgl. Übungen).

## Homomorphismus von $SU(2)$ nach $O(3)$

- $SU(2)$  ist die Gruppe der unitären  $2 \times 2$  Matrizen mit Determinante 1, d.h.  $SU(2) := \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : AA^\dagger = I \text{ und } \det A = 1\} \subset SL(2, \mathbb{C})$ .
- Wie wirkt  $A \in SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$  auf  $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ ?  
 $E_0 = f(e_0) = I$  und damit

$$E_0 \rightarrow AE_0A^\dagger = AIA^\dagger = I = E_0 \quad \text{d.h.} \quad \phi(A)e_0 = e_0.$$

- $O(3) := \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : RR^T = I\}$  ist die Gruppe der orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrizen.
- Für Lorentz-Transformation der Form

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \quad \text{mit } R \in O(3)$$

gilt  $\Lambda e_0 = e_0$  und umgekehrt, d.h. diese Transformationen bilden eine zu  $O(3)$  isomorphe Untergruppe von  $O(3, 1)$ .<sup>9</sup>

Damit ist  $\phi$  auch ein Homomorphismus  $SU(2) \rightarrow O(3)$ .

- Die Abbildung ist wieder 2-zu-1, denn  $\phi(A) = \phi(-A)$ .
- Ähnlich wie oben wird ein  $A \in SU(2)$  nur auf solche Elemente von  $O(3)$  abgebildet, die stetig mit  $I$  verbunden sind, d.h. solche mit Determinante 1, d.h.  $\phi(SU(2)) = SO(3)$ .

---

<sup>9</sup>Man sagt auch oft kurz:  $O(3)$  ist eine Untergruppe von  $O(3, 1)$ .

## 2 Darstellungen

*We will rarely, if ever, fix an explicit basis, but thinking this way makes it easier to manipulate tensorial objects.*

Predrag Cvitanović

### 2.1 Definitionen

**Definition:** (Darstellung)

Sei  $G$  eine Gruppe und  $V$  ein Vektorraum. Eine Darstellung  $\Gamma$  ist ein Homomorphismus von  $G$  nach  $GL(V)$ , d.h. in die invertierbaren linearen Abbildungen  $V \rightarrow V$ , d.h. insbesondere

$$\Gamma(g)\Gamma(h) = \Gamma(gh) \quad \forall g, h \in G$$

und  $\Gamma(I) = \mathbb{1}$  (Einsoperator bzw. Einheitsmatrix). Man nennt  $\dim V$  die Dimension der Darstellung.

**Bemerkungen**

1. Eine Darstellung ist eine Wirkung von  $G$  auf  $V$  (zusätzlich linear).
2. Wir betrachten im Folgenden Vektorräume über  $\mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ ), z.B.  $\mathbb{C}^n$  oder  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , wenn nötig mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\forall v, w \in V$  und  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ :
  - (i)  $\langle v | w \rangle = \langle w | v \rangle^*$
  - (ii)  $\langle v | \alpha w \rangle = \alpha \langle v | w \rangle$
  - (iii)  $\langle v | v \rangle \geq 0$  und  $= 0$  nur für den Nullvektor  $v = 0$
3. Wählen wir in  $V$  eine Basis  $\{v_j : j = 1, \dots, \lambda = \dim V\}$ , so entspricht jedem  $\Gamma(g)$  eine  $\lambda \times \lambda$ -Matrix mit Matrixelementen

$$\Gamma(g)_{jk} = \langle v_j | \Gamma(g) | v_k \rangle,$$

und wir sprechen von einer *Matrixdarstellung*.

Man sagt dann: Die  $v_i$  transformieren sich unter  $G$  in der Darstellung  $\Gamma$ .

4. Falls  $V$  endlichdimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{C}$ :  $V \cong \mathbb{C}^{\dim V}$  und  $\dim V = \text{tr } \Gamma(I)$ .

**Definition:** (treu)

Eine Darstellung heißt treu, wenn der Homomorphismus  $\Gamma : G \rightarrow GL(V)$  injektiv ist, d.h. unterschiedliche Gruppenelemente werden durch unterschiedliche Matrizen dargestellt.

**Bemerkungen:**

1. Jede Gruppe hat die triviale Darstellung, in der  $\Gamma(g) = 1 \forall g \in G$ . Diese ist nicht treu. i.A. ;-)
2. Wenn eine Gruppe  $G$  eine nichttriviale invariante Untergruppe  $H$  hat, dann ist eine Darstellung der Faktorgruppe  $G/H$  auch eine Darstellung von  $G$ . Diese Darstellung

ist nicht treu. (vgl. ÜA 9)

**Idee:**  $\tilde{\Gamma}(g) := \Gamma(gH) \Rightarrow$  (i)  $\tilde{\Gamma}(g)\tilde{\Gamma}(h) = \Gamma(gH)\Gamma(hH) = \Gamma(ghH) = \tilde{\Gamma}(gh)$ ,  
(ii)  $\tilde{\Gamma}(h) = \mathbb{1} \forall h \in H$ .

**Umkehrung:** Ist  $\Gamma(G)$  eine nichttreue Darstellung von  $G$ , dann hat  $G$  mindestens eine invariante Untergruppe  $H$ , so dass  $\Gamma$  eine treue Darstellung der Faktorgruppe  $G/H$  definiert.

**Definition:** (Unitäre Darstellung)

Eine Darstellung  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  heißt unitär, falls  $\Gamma(g) \forall g \in G$  unitär ist, d.h.  $\langle \Gamma(g)v | \Gamma(g)w \rangle = \langle v | w \rangle \forall v, w \in V$ .

**Bemerkung:**

1. Ist  $V$  endlichdimensional und wählen wir eine Basis, so bedeutet dies eine Darstellung durch unitäre Matrizen.
2. Unitäre Darstellungen sind in physikalischen Anwendungen wichtig, da auf diese Weise Symmetrien in der Quantenmechanik oder Quantenfeldtheorie realisiert werden.

## 2.2 Äquivalente Darstellungen

**Definition:** (Äquivalente Darstellungen)

Seien  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  und  $\tilde{\Gamma} : G \rightarrow \text{GL}(W)$  Darstellungen derselben Gruppe. Man sagt  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  sind äquivalent, wenn es eine invertierbare lineare Abbildung  $S : V \rightarrow W$  gibt, so dass

$$\Gamma(g) = S^{-1} \tilde{\Gamma}(g) S \quad \forall g \in G.$$

**Bemerkung:**

1. Ist die lineare Abbildung sogar unitär, d.h.  $U : V \rightarrow W$  invertierbar mit  $\langle U\phi | U\psi \rangle_W = \langle \phi | \psi \rangle_V$  so spricht man von *unitär äquivalenten Darstellungen*. Für endlichdimensionale Darstellungen gilt  $V \cong W \cong \mathbb{C}^{\dim V}$ , und bei Wahl von Basen wird  $U$  zu einer unitären Matrix.
2. Für endliche Gruppen kann man zeigen, dass jede Darstellung äquivalent zu einer unitären Darstellung ist. (später)

## 2.3 Beispiele und Invariante Unterräume

Wir führen einige wichtige Konzepte zusammen mit einigen Sprechweisen aus der physikalischen Literatur anhand eines einfachen Beispiels ein.

- Betrachte wieder  $\{I, P\} \cong \mathbb{Z}_2$ ,

$$I : \mathbb{R}^d \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}, \quad P : \mathbb{R}^d \ni \vec{x} \mapsto -\vec{x}$$

sowie  $\{O_I, O_P\} \cong \mathbb{Z}_2$  (vgl. Beispiel 3b aus Abschnitt 1.3).<sup>10</sup>

$$(O_I f)(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (O_P f)(\vec{x}) = f(-\vec{x}).$$

Wähle eine Funktion  $f_1$  ohne spezielle Symmetrieeigenschaften unter  $\{O_I, O_P\}$  und definiere

$$f_2(\vec{x}) := (O_P f_1)(\vec{x}) = f_1(-\vec{x}).$$

Weiter sei

$$\mathcal{S} := \text{span}(f_1, f_2),$$

$\dim \mathcal{S} = 2$  (Das war mit “ohne spezielle Symmetrieeigenschaften” gemeint.)

- Man sagt  $\mathcal{S}$  ist *invariant* unter  $\{O_I, O_P\}$ , d.h.

$$f \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad O_I f, O_P f \in \mathcal{S}.$$

Klar, da

$$O_P f = O_P(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 O_P f_1 + \alpha_2 O_P f_2 = \alpha_2 f_1 + \alpha_1 f_2 \in \mathcal{S}.$$

Dies definiert eine 2-dimensionale Darstellung von  $\mathbb{Z}_2$  (oder irgendeiner zu  $\mathbb{Z}_2$  isomorphen Gruppe) auf  $\mathcal{S}$ . In der Basis  $\{f_1, f_2\}$  gilt

$$\Gamma^{\textcircled{3}}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\textcircled{3}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Definiere nun eine neue Basis,

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &:= f_1 + f_2, & \bar{f}_2 &:= f_1 - f_2, & \mathcal{S} &= \text{span}(\bar{f}_1, \bar{f}_2). \\ \Rightarrow \quad O_P \bar{f}_1 &= \bar{f}_1 \quad (\text{gerade}), & O_P \bar{f}_2 &= -\bar{f}_2 \quad (\text{ungerade}). \end{aligned}$$

Man sagt  $\bar{f}_1$  und  $\bar{f}_2$  haben feste Parität.

Darstellung von  $\mathbb{Z}_2$  auf  $\mathcal{S}$  in der neuen Basis:

$$\Gamma^{\textcircled{4}}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\textcircled{4}}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Gamma^{\textcircled{4}}$  ist äquivalent zu  $\Gamma^{\textcircled{3}}$ , sogar unitär äquivalent, denn

$$\Gamma^{\textcircled{4}} = U^\dagger \Gamma^{\textcircled{3}} U \quad \text{mit} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Hier klar, denn gerade durch diesen Basiswechsel hatten wir  $\Gamma^{\textcircled{4}}$  ja erhalten – in anderen Fällen weiß man das aber vielleicht gerade nicht!)

---

<sup>10</sup> $\{O_I, O_P\}$  ist auch eine Darstellung von  $\mathbb{Z}_2$  auf einem geeigneten Funktionen-Raum – jetzt wollen wir aber auf etwas anderes hinaus. . .

- $\mathcal{S}$  hat jedoch noch kleinere *invariante Unterräume*, es gilt nämlich

$$\mathcal{S} = \bar{\mathcal{S}}_1 \oplus \bar{\mathcal{S}}_2, \quad (\text{direkte Summe})$$

wobei die  $\bar{\mathcal{S}}_j := \text{span}(\bar{f}_j)$  einzeln invariant unter  $\{O_I, O_P\}$  sind,

$$\begin{aligned} O_P(\alpha \bar{f}_1) &= \alpha \bar{f}_1 \in \bar{\mathcal{S}}_1 \\ O_P(\alpha \bar{f}_2) &= -\alpha \bar{f}_2 \in \bar{\mathcal{S}}_2 \end{aligned}$$

Man sagt  $\mathcal{S}$  ist *reduzibel* (bzgl.  $\{O_I, O_P\}$ ).

$\bar{\mathcal{S}}_1$  und  $\bar{\mathcal{S}}_2$  sind *irreduzibel*, d.h. sie können nicht in kleinere invariante Räume zerlegt werden (hier weil sie 1-dimensional sind).

- Auf den invarianten Unterräumen sind jeweils eindimensionale Darstellungen definiert:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\textcircled{1}}(I) &= 1, & \Gamma^{\textcircled{1}}(P) &= 1, & \text{auf } \bar{\mathcal{S}}_1 & \text{ und} \\ \Gamma^{\textcircled{2}}(I) &= 1, & \Gamma^{\textcircled{2}}(P) &= -1, & \text{auf } \bar{\mathcal{S}}_2. \end{aligned}$$

Jede Funktion mit gerader (ungerader) Parität transformiert sich unter  $\{O_I, O_P\}$  in der Darstellung  $\Gamma^{\textcircled{1}}$  ( $\Gamma^{\textcircled{2}}$ ).

- Wie  $\mathcal{S}$  (s.o.) heißt nun auch die Darstellung  $\Gamma^{\textcircled{3}}$  *reduzibel*<sup>11</sup> und man schreibt

$$\Gamma^{\textcircled{3}} = \Gamma^{\textcircled{1}} \oplus \Gamma^{\textcircled{2}}.$$

- **Weiteres Beispiel:** Betrachte

$$\begin{aligned} h_1(\vec{x}) &:= x^2 + y + z, & h_2(\vec{x}) &:= (O_P h_1)(\vec{x}) = x^2 - y - z, & \mathcal{S}_h &:= \text{span}(h_1, h_2), \\ g_1(\vec{x}) &:= e^{-xyz}, & g_2(\vec{x}) &:= (O_P g_1)(\vec{x}) = e^{xyz}, & \mathcal{S}_g &:= \text{span}(g_1, g_2). \end{aligned}$$

Das Tensor-Produkt  $\mathcal{S}_h \otimes \mathcal{S}_g$  wird durch die vier Produkte  $h_1 g_1, h_1 g_2, h_2 g_1, h_2 g_2$  aufgespannt und ist invariant unter  $\{O_I, O_P\}$ , denn  $f \in \mathcal{S}_h \otimes \mathcal{S}_g \Rightarrow$

$$\begin{aligned} O_P f &= O_P(ah_1 g_1 + bh_1 g_2 + ch_2 g_1 + dh_2 g_2) \\ &= dh_1 g_1 + ch_1 g_2 + bh_2 g_1 + ah_2 g_2 \in \mathcal{S}_h \otimes \mathcal{S}_g \end{aligned}$$

Dies definiert eine 4-dimensionale Darstellung von  $\mathbb{Z}_2$  auf  $\mathcal{S}_h \otimes \mathcal{S}_g$ :

$$\Gamma^{\textcircled{5}}(I) = \mathbb{1}, \quad \Gamma^{\textcircled{5}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

<sup>11</sup>wird später noch richtig definiert

- Invariante Unterräume:

$h_1g_1$  und  $h_2g_2 = O_P(h_1g_1)$  spannen einen invarianten Unterraum  $\mathcal{S}^\omega$  auf, analog  $\mathcal{S}^\delta := \text{span}(h_1g_2, h_2g_1)$ . Offensichtlich:

$$\mathcal{S}_h \otimes \mathcal{S}_g = \mathcal{S}^\omega \oplus \mathcal{S}^\delta$$

jeweils mit einer Darstellung äquivalent zu  $\Gamma^{\textcircled{3}}$ . Reduziere  $\mathcal{S}^\omega$  und  $\mathcal{S}^\delta$  jeweils weiter durch Einführen von Basisfunktionen gerader und ungerader Parität. Für die Darstellungen gilt dann

$$\Gamma^{\textcircled{5}} = \Gamma^{\textcircled{3}} \otimes \Gamma^{\textcircled{3}} = \Gamma^{\textcircled{1}} \oplus \Gamma^{\textcircled{1}} \oplus \Gamma^{\textcircled{2}} \oplus \Gamma^{\textcircled{2}}$$

Man schreibt auch (Dimensionen)

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1$$

Sieht etwas lustig aus und ist hier natürlich nicht besonders tief sinnig – aber wenn wir ähnliche Rechnungen später z.B. für Darstellungen von  $SU(n)$  durchführen können, haben wir einiges gelernt...

## 2.4 Irreduzible Darstellungen

*This basis way of thinking about  $X \otimes Y$  is useful; the abstract definition is useful in showing that the construction is not basis dependent.*

Barry Simon

**Zur Erinnerung:** (Direkte Summe & Tensorprodukt)

Sind  $V$  und  $W$  Vektorräume,  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$ , mit Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$ , so ist

- (i)  $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$  eine Basis der direkten Summe  $V \oplus W$  mit  $\dim V \oplus W = \dim V + \dim W$  und
- (ii)  $\{v_j \otimes w_k\}_{j=1, \dots, n, k=1, \dots, m}$  eine Basis des Tensorprodukts  $V \otimes W$  mit  $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$ .

**Bemerkungen:**

1. Sind  $A : V \rightarrow V$  und  $B : W \rightarrow W$  lineare Abbildungen, so ist  $A \oplus B$  die lineare Abbildung

$$A \oplus B : V \oplus W \rightarrow V \oplus W \\ (v, w) \mapsto (Av, Bw),$$

in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av \\ Bw \end{pmatrix}.$$



2. Sind  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  und  $\tilde{\Gamma} : G \rightarrow \text{GL}(W)$  Darstellungen, so ist auch  $\Gamma \oplus \tilde{\Gamma} : G \rightarrow \text{GL}(V \oplus W)$ , definiert durch  $(\Gamma \oplus \tilde{\Gamma})(g) = \Gamma(g) \oplus \tilde{\Gamma}(g)$ , eine Darstellung. (*Direkte Summe von Darstellungen*)

Jetzt fragen wir uns umgekehrt, ob eine Darstellung die direkte Summe "kleinerer" Darstellungen ist...

**Definition:** (Invarianter Unterraum)

Sei  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung, und  $U \subseteq V$  ein Unterraum von  $V$ .  $U$  heißt invarianter Unterraum (bezüglich  $\Gamma(G)$ ), falls  $\Gamma(g)v \in U \ \forall v \in U$  und  $\forall g \in G$ .

**Bemerkungen:** Jeder Darstellungsraum hat zwei triviale invariante Unterräume,  $V$  und  $\{0\}$ . Alle anderen heißen (ggf.) nichttrivial.

**Definition:** (Irreduzible Darstellung & vollständige Reduzibilität)

Eine Darstellung  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  heißt

- (i) irreduzibel, wenn  $V$  keinen nichttrivialen invarianten Unterraum besitzt. Ebenso heißt  $V$  dann irreduzibel bezüglich  $\Gamma(G)$ .
- (ii) reduzibel, falls  $V$  einen nichttrivialen invarianten Unterraum  $U$  besitzt. Ist in diesem Fall auch das orthogonale Komplement,

$$U^\perp = \{v \in V : \langle u|v \rangle = 0 \ \forall u \in U\}$$

ein invarianter Unterraum, so heißt  $\Gamma(G)$  vollständig reduzibel.

**Abkürzung** für "Irreduzible Darstellung": *Irrep* (von engl. "irreducible representation").

**Beispiele:**

In Abschnitt 2.3 waren  $\Gamma^{\textcircled{3}}$ ,  $\Gamma^{\textcircled{4}}$  und  $\Gamma^{\textcircled{5}}$  reduzibel,  $\Gamma^{\textcircled{1}}$  und  $\Gamma^{\textcircled{2}}$  dagegen irreduzibel.

**Satz 2.** Sei  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine unitäre Darstellung und  $U \subseteq V$  ein invarianter Unterraum. Dann gilt:

- (i)  $U^\perp$  ist ebenfalls invariant,
- (ii) Die Einschränkungen  $\Gamma|_U$  und  $\Gamma|_{U^\perp}$  definieren Darstellungen  $\Gamma^{\textcircled{1}}$  und  $\Gamma^{\textcircled{2}}$ , und
- (iii)  $\Gamma$  ist äquivalent zu  $\Gamma^{\textcircled{1}} \oplus \Gamma^{\textcircled{2}}$ . Man schreibt oft kurz  $\Gamma = \Gamma^{\textcircled{1}} \oplus \Gamma^{\textcircled{2}}$ .

**Bemerkung:** Damit kann jede unitäre Darstellung als direkte Summe nichttrivialer (d.h. nicht nulldimensionaler) irreduzibler Darstellungen geschrieben werden.

In Matrixschreibweise heißt dies, wir können eine Basis von  $V$  finden, so dass

$$\Gamma(g) = \begin{pmatrix} \Gamma^{\textcircled{1}}(g) & & & \mathbf{0} \\ & \Gamma^{\textcircled{2}}(g) & & \\ & & \Gamma^{\textcircled{3}}(g) & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix},$$

wobei allen  $\Gamma^{\textcircled{i}}(G)$  irreduzibel sind ( $n_j \times n_j$ -Blöcke mit  $n_j = \dim \Gamma^{\textcircled{i}}(G)$ ).

Dabei kann eine irreduzible Darstellung mehr als einmal vorkommen,

$$\Gamma(G) = \underbrace{\Gamma^1(G) \oplus \cdots \oplus \Gamma^1(G)}_{a_1 \text{ mal}} \oplus \underbrace{\Gamma^2(G) \oplus \cdots \oplus \Gamma^2(G)}_{a_2 \text{ mal}} \oplus \cdots = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \Gamma^i(G),$$

d.h. die Darstellung  $\Gamma$  enthält die irreduzible Darstellung  $\Gamma^i$   $a_i$  mal.

**Beispiele:** In Abschnitt 2.3 lag die reduzible Darstellung  $\Gamma^{(4)}$  bereits in reduzierter Form (d.h. blockdiagonal) vor,  $\Gamma^{(3)}$  und  $\Gamma^{(5)}$  können durch einen Basiswechsel in diese Form gebracht werden. In  $\Gamma^{(5)}$  kamen die Irreps  $\Gamma^{(1)}$  und  $\Gamma^{(2)}$  je zweimal vor.

**Beweis:** Entscheidend ist (i), denn (ii) und (iii) folgen dann unmittelbar.

(i) Sei  $v \in U^\perp$ ,  $u \in U$  und  $g \in G$ . Dann gilt

$$\langle \Gamma(g)v | u \rangle = \langle v | \Gamma(g)^\dagger u \rangle = \langle v | \Gamma(g)^{-1} u \rangle = \langle v | \Gamma(g^{-1}) u \rangle = 0.$$

(ii)  $\Gamma^{(1)} := \Gamma|_U$ ,  $u \in U \Rightarrow$

$$\Gamma^{(1)}(g)\Gamma^{(1)}(h)u = \Gamma^{(1)}(g)\Gamma(h)u = \Gamma(g)\Gamma(h)u = \Gamma(gh)u = \Gamma^{(1)}(gh)u$$

□

**Satz 3.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine Darstellung und  $\langle | \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $V$ . Dann ist  $\Gamma$  äquivalent zu einer unitären Darstellung.

**Beweis:**

$$(v, w) := \sum_{g \in G} \langle \Gamma(g)v | \Gamma(g)w \rangle \quad (*)$$

ist ebenfalls ein Skalarprodukt, denn

$$(i) \quad (v, w) = \sum_{g \in G} \langle \Gamma(g)v | \Gamma(g)w \rangle = \sum_{g \in G} \langle \Gamma(g)w | \Gamma(g)v \rangle^* = \left( \sum_{g \in G} \langle \Gamma(g)w | \Gamma(g)v \rangle \right)^* = (v, w)^*,$$

$$(ii) \quad (v, \alpha w) = \sum_{g \in G} \langle \Gamma(g)v | \Gamma(g)\alpha w \rangle = \alpha \sum_{g \in G} \langle \Gamma(g)v | \Gamma(g)w \rangle = \alpha(v, w),$$

$$(iii) \quad (v, v) = \sum_{g \in G} \underbrace{\langle \Gamma(g)v | \Gamma(g)v \rangle}_{\geq 0} \geq \langle \Gamma(I)v | \Gamma(I)v \rangle = \langle v | v \rangle \geq 0, = 0 \text{ nur, falls } v = 0.$$

Sei  $\{v_j\}$  eine Orthonormal(ON)-Basis bezüglich  $\langle | \rangle$  und  $\{w_j\}$  eine ON-Basis bezüglich  $( , )$ . Dann existiert ein  $S : V \rightarrow V$  invertierbar mit  $Sw_j = v_j$  (Basiswechsel). Damit gilt

$$(v, w) = \langle Sv | Sw \rangle, \quad (+)$$

denn mit  $v = \sum_j \alpha_j w_j$  und  $w = \sum_j \beta_j w_j$  folgt

$$\langle Sv|Sw \rangle = \langle S \sum_j \alpha_j w_j | S \sum_k \beta_k w_k \rangle = \sum_{j,k} \alpha_j^* \beta_k \underbrace{\langle v_j | v_k \rangle}_{=(w_j, w_k)} = (\sum_j \alpha_j w_j, \sum_k \beta_k w_k) = (v, w).$$

Dann ist

$$\tilde{\Gamma}(g) := S\Gamma(g)S^{-1}$$

äquivalent zu  $\Gamma$  und unitär, denn

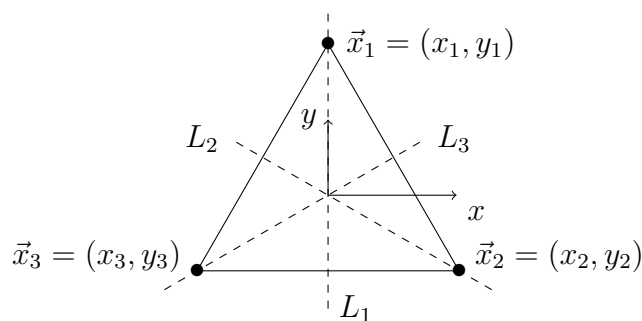
$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Gamma}(g)v | \tilde{\Gamma}(g)w \rangle &= \langle S\Gamma(g)S^{-1}v | S\Gamma(g)S^{-1}w \rangle \\ &\stackrel{(+,*)}{=} \sum_{g' \in G} \langle \underbrace{\Gamma(g')\Gamma(g)}_{\Gamma(g'g)} S^{-1}v | \Gamma(g')\Gamma(g)S^{-1}w \rangle, & g'g =: h \\ &= \sum_{h \in G} \langle \Gamma(h)S^{-1}v | \Gamma(h)S^{-1}w \rangle & \text{(Umordnungstheorem, vgl. ÜA 1)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle S^{-1}v, S^{-1}w \rangle \\ &\stackrel{(+)}{=} \langle v | w \rangle \end{aligned}$$

□

Die Endlichkeit von  $G$  haben wir benötigt, um  $\sum_{g \in G}$  definieren zu können. Später werden wir sehen, dass wir für manche unendlichen Gruppen (nämlich kompakte, z.B.  $SO(n)$  oder  $U(n)$ ) die Summe durch ein geeignetes Integral ersetzen können. Für stetige Darstellungen gilt der Satz dann immer noch.

### 2.4.1 $O_A$ Operatoren am Beispiel der Gruppe $D_3$

- $D_3 =$  Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks  $\cong S_3$



- Gruppenelemente:  
 $I =$  Identität

$C$  = Drehung um  $120^\circ$  im Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt  $\hat{=}$  (123)  
 $\bar{C}$  = Drehung um  $120^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt  $\hat{=}$  (132)  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  = Spiegelungen an  $L_1, L_2, L_3 \hat{=}$  (23), (13), (12)

Multiplikationstafel vgl. ÜA 5.

- Betrachte nun invertierbare lineare Abbildungen  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ . (Die 6 Elemente von  $D_3$  sind Beispiele für solche Abbildungen  $A$ .)
- Für jede Abbildung  $A$  definiere einen Operator  $O_A$ , der auf beliebige Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}$ ) wirkt, durch

$$(O_A f)(\vec{x}) = f(A^{-1}\vec{x}).$$

- Die 6 Operatoren  $O_A, A \in D_3$ , bilden eine zu  $D_3$  isomorphe Gruppe,  $\bar{D}_3$ , denn

$$\begin{aligned} ((O_A O_B) f)(\vec{x}) &= (O_A(O_B f))(\vec{x}) = (O_B f)(A^{-1}\vec{x}) = f(B^{-1}A^{-1}\vec{x}) \\ &= f((AB)^{-1}\vec{x}) = (O_{AB} f)(\vec{x}). \end{aligned}$$

- Wir betrachten nun die Wirkung dieser 6 Operatoren auf bestimmte Funktionen und erzeugen damit Darstellungen von  $D_3 \cong S_3$

Zunächst

$$\phi_1(\vec{x}) := e^{-|\vec{x}-\vec{x}_1|^2} = e^{-(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}.$$

Was ist  $O_C \phi_1$ ?

$$\begin{aligned} \phi_2(\vec{x}) &:= (O_C \phi_1)(\vec{x}) = \phi_1(C^{-1}\vec{x}) \\ &= \exp(-|C^{-1}\vec{x} - \vec{x}_1|^2) \\ &= \exp(-|C^{-1}(\vec{x} - C\vec{x}_1)|^2) \\ &= \exp(-|\vec{x} - C\vec{x}_1|^2) \quad (\text{denn Rotationen erhalten den Abstand}) \\ &= \exp(-|\vec{x} - \vec{x}_2|^2) \end{aligned}$$

Analog:

$$\phi_3(\vec{x}) := (O_{\bar{C}} \phi_1)(\vec{x}) = e^{-|\vec{x}-\vec{x}_3|^2}$$

Für die Spiegelungen gilt

$$\begin{aligned} (O_{\sigma_1} \phi_1)(\vec{x}) &= \phi_1(\sigma_1^{-1}\vec{x}) \\ &= \exp(-|\sigma_1^{-1}\vec{x} - \vec{x}_1|^2) \\ &= \exp(-|\sigma_1^{-1}(\vec{x} - \sigma_1\vec{x}_1)|^2) \\ &= \exp(-|\vec{x} - \sigma_1\vec{x}_1|^2) \quad (\text{denn Spiegelungen erhalten den Abstand}) \\ &= \exp(-|\vec{x} - \vec{x}_1|^2) \quad (\text{denn } \vec{x}_1 \text{ ist auf der } L_1\text{-Achse}) \\ &= \phi_1(\vec{x}), \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}(O_{\sigma_2}\phi_1)(\vec{x}) &= \phi_1(\sigma_2^{-1}\vec{x}) = \exp(-|\vec{x} - \sigma_2\vec{x}_1|^2) = \exp(-|\vec{x} - \vec{x}_3|^2) \\ &= \phi_3(\vec{x}) \\ (O_{\sigma_3}\phi_1)(\vec{x}) &= \phi_1(\sigma_3^{-1}\vec{x}) = \exp(-|\vec{x} - \sigma_3\vec{x}_1|^2) = \exp(-|\vec{x} - \vec{x}_2|^2) \\ &= \phi_2(\vec{x}).\end{aligned}$$

Ebenso findet man die Wirkung der Operatoren auf  $\phi_2$  und  $\phi_3$  und erhält

	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
$O_I$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$
$O_C$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_1$
$O_{\bar{C}}$	$\phi_3$	$\phi_1$	$\phi_2$
$O_{\sigma_1}$	$\phi_1$	$\phi_3$	$\phi_2$
$O_{\sigma_2}$	$\phi_3$	$\phi_2$	$\phi_1$
$O_{\sigma_3}$	$\phi_2$	$\phi_1$	$\phi_3$

d.h. der  $\mathcal{S} = \text{span}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  ist invariant unter  $\bar{D}_3$ , und die Funktionen  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  transformieren sich unter einer 3-dimensionalen Darstellung der Gruppe ( $\bar{D}_3 \cong D_3 \cong S_3$ ), nämlich

$$\begin{aligned}\Gamma^{\oplus}(I) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \Gamma^{\oplus}(C) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma^{\oplus}(\bar{C}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Gamma^{\oplus}(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma^{\oplus}(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Gamma^{\oplus}(\sigma_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Ist diese Darstellung reduzibel?

Ja, denn  $\mathcal{S}$  ist reduzibel, d.h. es gibt eine Basistransformation, durch die  $\mathcal{S}$  in kleinere invariante Unterräume zerlegt werden kann:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_1 &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \\ \bar{\phi}_2 &= \sqrt{3}(\phi_2 - \phi_3) \\ \bar{\phi}_3 &= 2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3\end{aligned}$$

(Wie man auf diese Basistransformation kommt, lernen wir später.)

- $\bar{\phi}_1$  ist invariant unter  $\bar{D}_3$ , denn die Operatoren  $O_A$  vertauschen nur die Terme in der Summe, d.h. insbesondere  $\text{span}(\bar{\phi}_1)$  ist invariant und  $\bar{\phi}_1$  transformiert sich in der trivialen Darstellung  $\Gamma^{\oplus}(g) = 1 \forall g \in D_3$ .

- Für  $\bar{\phi}_2$  und  $\bar{\phi}_3$  erhält man

	$\bar{\phi}_2$	$\bar{\phi}_3$
$O_I$	$\phi_2$	$\phi_3$
$O_C$	$-\frac{1}{2}\bar{\phi}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\phi}_3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\phi}_2 - \frac{1}{2}\bar{\phi}_3$
$O_{\bar{C}}$	$-\frac{1}{2}\bar{\phi}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\phi}_3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\phi}_2 - \frac{1}{2}\bar{\phi}_3$
$O_{\sigma_1}$	$-\bar{\phi}_2$	$\bar{\phi}_3$
$O_{\sigma_2}$	$\frac{1}{2}\bar{\phi}_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\phi}_3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\phi}_2 - \frac{1}{2}\bar{\phi}_3$
$O_{\sigma_3}$	$\frac{1}{2}\bar{\phi}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\phi}_3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{\phi}_2 - \frac{1}{2}\bar{\phi}_3$

d.h.  $\text{span}(\bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$  ist invariant, und  $\bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3$  transformieren sich in der 2-dimensionalen Darstellung

$$\begin{aligned} \Gamma^{\otimes 3}(I) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Gamma^{\otimes 3}(C) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \Gamma^{\otimes 3}(\bar{C}) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \Gamma^{\otimes 3}(\sigma_1) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \Gamma^{\otimes 3}(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} & \Gamma^{\otimes 3}(\sigma_3) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3$  transformieren sich also unter  $\bar{D}$  in der Darstellung

$$\Gamma^{\otimes 4}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma^{\otimes 3}(g) \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad \forall g \in D_3,$$

d.h.  $\Gamma^{\otimes 4} = \Gamma^{\otimes 2} \oplus \Gamma^{\otimes 3}$ . Außerdem schreibt man auch  $\Gamma^{\otimes 1} = \Gamma^{\otimes 2} \oplus \Gamma^{\otimes 3}$ , da  $\Gamma^{\otimes 1}$  äquivalent zu  $\Gamma^{\otimes 4}$  ist,

$$\Gamma^{\otimes 4}(g) = S^{-1}\Gamma^{\otimes 1}(g)S \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \forall g \in D_3.$$

$\Gamma^{\otimes 4}$  liegt bereits in reduzierter Form vor,  $\Gamma^{\otimes 1}$  jedoch nicht.

- Bleibt die **Frage**: Ist die 2-dimensionale Darstellung  $\Gamma^{\otimes 3}$  reduzibel?

## 2.5 Schur'sche Lemmata und Orthogonalität irreduzibler Darstellungen

### Satz 4. (1. Schur'sches Lemma)

Sei  $G$  eine Gruppe,  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine endlichdimensionale, irreduzible Darstellung und  $A : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Falls  $A$  mit  $\Gamma(G)$  kommutiert, d.h.  $A\Gamma(g) = \Gamma(g)A \quad \forall g \in G$ , dann ist  $A = c\mathbb{1}$  für ein  $c \in \mathbb{C}$ .

**Beweis:**

Sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ , d.h.  $\exists v \in V, v \neq 0 : (A - \lambda)v = 0$ , dann gilt

$$(A - \lambda)\Gamma(g)v = \Gamma(g)(A - \lambda)v = 0 \quad \forall g \in G,$$

und damit ist  $U := \{v \in V : (A - \lambda)v = 0\}$  ein invarianter Unterraum. Da  $U \neq \{0\}$  (und da  $\Gamma$  irreduzibel ist) folgt  $U = V$  und damit  $A = \lambda\mathbb{1}$ .  $\square$

**Korollar zu Satz 4:** *Ist  $G$  abelsch, so ist hat jede unitäre Irrep Dimension 1.*  
(Beweis in ÜA 13)

**Satz 5. (2. Schur'sches Lemma)**

Sei  $G$  eine Gruppe,  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  und  $\tilde{\Gamma} : G \rightarrow \text{GL}(W)$  zwei endlichdimensionale, unitäre, irreduzible Darstellung und  $A : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Falls

$$A\Gamma(g) = \tilde{\Gamma}(g)A \quad \forall g \in G,$$

dann ist entweder  $A = 0$  oder  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  sind unitär äquivalent.

**Beweis:** Ersetze  $g$  durch  $g^{-1}$  und bilde das hermitesch Konjugierte, so gilt auch

$$\Gamma(g)A^\dagger = A^\dagger\tilde{\Gamma}(g) \quad \forall g \in G.$$

Dies liefert

$$A^\dagger A\Gamma(g) = A^\dagger\tilde{\Gamma}(g)A = \Gamma(g)A^\dagger A \quad \forall g \in G,$$

und analog  $AA^\dagger\tilde{\Gamma}(g) = \tilde{\Gamma}(g)AA^\dagger$ . Aus dem ersten Schur'schen Lemma folgt damit  $A^\dagger A = c\mathbb{1}$  und  $AA^\dagger = c\mathbb{1}$ , d.h. entweder  $c = 0$  und damit  $A = 0$  oder  $U = \frac{1}{\sqrt{c}}A$  ist unitär mit  $\tilde{\Gamma}(G) = U\Gamma(G)U^\dagger$ .  $\square$

**Bemerkung:** Sind die Darstellungen nicht unitär, aber  $G$  endlich, so folgt wegen Satz 3:  $\exists S$  und  $T$ , so dass  $\Gamma'(G) = S\Gamma(G)S^{-1}$  und  $\tilde{\Gamma}'(G) = T\tilde{\Gamma}(G)T^{-1}$  unitär. Für  $A' := T A S^{-1}$  gilt

$$A'\Gamma'(G) = T A S^{-1} S\Gamma(G)S^{-1} = T\tilde{\Gamma}(G)A S^{-1} = \tilde{\Gamma}'(G)A',$$

d.h. entweder  $A' = 0$  und damit  $A = 0$  oder  $\exists U$  unitär, so dass

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}'(G) &= U\Gamma'(G)U^{-1} \\ \Leftrightarrow T\tilde{\Gamma}(G)T^{-1} &= U S\Gamma(G)S^{-1}U^{-1} \\ \Leftrightarrow \tilde{\Gamma}(G) &= T^{-1}U S\Gamma(G)S^{-1}U^{-1}T, \end{aligned}$$

d.h.  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  sind äquivalent.

**Satz 6.** *Sei  $G$  eine endliche Gruppe, und seien  $\Gamma^j(G)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , nicht-äquivalente, unitäre, irreduzible Darstellungen mit  $\dim \Gamma^j = d_j$ . Dann erfüllen die Matrixelemente die Orthogonalitätsbeziehung*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\Gamma^j(g)_{\mu\nu})^* \Gamma^k(g)_{\mu'\nu'} = \frac{1}{d_j} \delta_{jk} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$$

$\forall \mu, \nu = 1, \dots, d_j$  und  $\forall \mu', \nu' = 1, \dots, d_k$ .

**Beweis:** Sei  $V_j$  der Darstellungsraum von  $\Gamma^j$ , und sei  $A : V_j \rightarrow V_k$  linear (sonst beliebig).  
Definiere

$$\tilde{A} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Gamma^k(g) A \Gamma^j(g)^{-1}. \quad (*)$$

Es gilt ( $\forall h \in G$ )

$$\begin{aligned} \Gamma^k(h) \tilde{A} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Gamma^k(h) \Gamma^k(g) A \Gamma^j(g)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Gamma^k(hg) A \Gamma^j(g)^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \Gamma^k(g') A \Gamma^j(h^{-1}g')^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \Gamma^k(g') A \Gamma^j(g')^{-1} \Gamma^j(h^{-1})^{-1} \\ &= \tilde{A} \Gamma^j(h), \end{aligned}$$

d.h. aus dem 2. Schur'schen Lemma folgt, dass  $\tilde{A} = 0$ , falls  $j \neq k$ , und sonst  $\tilde{A} = c\mathbb{1}$ , wobei

$$c = \frac{1}{d_j} \operatorname{tr} \tilde{A} = \frac{1}{d_j} \operatorname{tr} A,$$

kurz

$$\tilde{A} = \frac{1}{d_j} \operatorname{tr} A \delta_{jk} \mathbb{1}. \quad (+)$$

Wähle nun  $A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\nu'} \delta_{\beta\nu}$  (also nur ein Element  $\neq 0$ )  $\Rightarrow \operatorname{tr} A = \delta_{\nu\nu'}$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\mu'\mu} &\stackrel{(+)}{=} \frac{1}{d_j} \delta_{\nu\nu'} \delta_{jk} \delta_{\mu\mu'} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\alpha, \beta} \Gamma^k(g)_{\mu'\alpha} A_{\alpha\beta} (\Gamma^j(g)^{-1})_{\beta\mu} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Gamma^k(g)_{\mu'\nu'} \underbrace{(\Gamma^j(g)^{-1})_{\nu\mu}}_{= (\Gamma^j(g)^\dagger)_{\nu\mu} = (\Gamma^j(g)_{\mu\nu})^*} \end{aligned}$$

□

### Konsequenzen aus Satz 6

- Für festes  $j, \mu, \nu$  können wir die  $|G|$  Zahlen  $\Gamma^j(g)_{\mu\nu}$ ,  $g \in G$  bis  $\Gamma^i(A_n)_{\mu\nu}$  zu einem Vektor  $v^{(j\mu\nu)} \in \mathbb{C}^{|G|}$  zusammenfassen.
- Für jede Darstellung  $\Gamma^j$  gibt es  $d_j^2$  solcher Vektoren (denn  $\mu, \nu = 1, \dots, d_j$ ).



- Satz 6 besagt, dass  $v^{(j\mu\nu)} \perp v^{(k\mu'\nu')}$ , wenn  $j \neq k$  oder  $\mu \neq \mu'$  oder  $\nu \neq \nu'$ .
- In  $\mathbb{C}^{|G|}$  gibt es aber höchstens  $|G|$  zueinander orthogonale Vektoren

$$\Rightarrow \sum_j d_j^2 \leq |G|.$$

In Abschnitt 2.7 zeigen wir, dass sogar

$$\sum_j d_j^2 = |G|.$$

Summiert wird über alle nicht-äquivalenten irreduziblen Darstellungen, d.h. für eine endliche Gruppe gibt es nur endlich viele endlichdimensionale nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen.

## 2.6 Charaktere von Darstellungen

**Definition:** (Charakter)

Ist  $\Gamma : G \rightarrow \text{GL}(V)$  eine endlichdimensionale Darstellung, so heißt  $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\chi(g) = \text{tr} \Gamma(g)$$

Charakter der Darstellung.

**Bemerkungen:**

1. Ausgedrückt durch Matrixelemente gilt

$$\chi(g) = \sum_{\mu=1}^{\dim V} \Gamma(g)_{\mu\mu}.$$

2. Sind  $\Gamma$  und  $\tilde{\Gamma}$  äquivalent, so gilt

$$\tilde{\chi}(g) = \text{tr} \tilde{\Gamma}(g) = \text{tr}(S\Gamma(g)S^{-1}) = \text{tr}(S^{-1}S\Gamma(g)) = \text{tr} \Gamma(g) = \chi(g).$$

3. Alle Elemente einer Konjugationsklasse haben denselben Charakter, denn

$$\begin{aligned} \chi(hgh^{-1}) &= \text{tr} \Gamma(hgh^{-1}) = \text{tr}(\Gamma(h)\Gamma(g)\Gamma(h^{-1})) = \text{tr}(\Gamma(h^{-1})\Gamma(h)\Gamma(g)) \\ &= \text{tr}(\Gamma(h^{-1}h)\Gamma(g)) = \text{tr} \Gamma(g) = \chi(g). \end{aligned}$$

**Korollar zu Satz 6.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe und seien  $\Gamma^j(G)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , nicht-äquivalente, irreduzible Darstellungen mit  $\dim \Gamma^j = d_j$ . Dann erfüllen die Charaktere  $\chi^j = \text{tr} \Gamma^j$  die Orthogonalitätsbeziehung

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi^j(g))^* \chi^k(g) = \delta_{jk}.$$

**Beweis:** O.B.d.A.  $\Gamma^j$  unitär, sonst Ähnlichkeitstrafo (Satz 3). Setze in

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\Gamma^j(g)_{\mu\nu})^* \Gamma^k(g)_{\mu'\nu'} = \frac{1}{d_j} \delta_{jk} \delta_{\mu\mu'} \delta_{\nu\nu'}$$

$\nu = \mu$  und  $\nu' = \mu'$  und summiere über  $\mu$  und  $\mu'$ . □

**Bemerkungen:**

1. Da die Charaktere nur von der Konjugationsklasse abhängen, können wir die Orthogonalitätsbeziehung auch schreiben als

$$\frac{1}{|G|} \sum_c n_c (\chi_c^j)^* \chi_c^k = \delta_{jk}.$$

Dabei nummeriert  $c$  die Klassen, und  $n_c$  ist die Anzahl der Elemente in Klasse  $c$ .

2. Sei  $m$  die Anzahl der verschiedenen Konjugationsklassen von  $G$  und  $p$  die Anzahl der nicht äquivalenten irreduziblen Darstellungen.

Für festes  $j$  können wir die  $\chi_c^j$  zu einem Vektor  $v^j \in \mathbb{C}^m$  zusammenfassen. Die  $p$  Vektoren für verschiedene  $j$  sind wieder orthogonal zueinander

$$\Rightarrow p \leq m.$$

Tatsächlich gilt das Gleichheitszeichen, d.h. die Anzahl der nicht äquivalenten irreduziblen Darstellungen ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen. (Beweis in den Übungen)

Die  $m \times m$  Matrix mit Einträgen  $\chi_c^i$ ,  $i, c = 1, \dots, m$ , heißt *Charaktertafel* der Gruppe.

3. Für eine (i.A. reduzible) Darstellung der Form

$$\Gamma = \sum_{j \oplus} a_j \Gamma^j \quad (\Gamma^j \text{ irreduzibel})$$

gilt

$$\chi(g) = \sum_j a_j \chi^j(g).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{j,k} a_j a_k \underbrace{\sum_{g \in G} (\chi^j(g))^* \chi^k(g)}_{=|G| \delta_{jk}} = \sum_j a_j^2$$

Ist  $\Gamma(G)$  irreduzibel, so ist eines der  $a_i = 1$  und alle anderen  $= 0$ , und damit

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = 1.$$

Ist  $\Gamma(G)$  reduzibel, so ist eines der  $a_i > 1$  oder mehrere der  $a_i \neq 0$ , und damit

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 > 1.$$

Damit haben wir ein *Kriterium für die Reduzibilität* einer gegebenen Darstellung.

**Beispiel:** Darstellungen von  $D_3 \cong S_3$  aus Abschnitt 2.4.1

- Konjugationsklassen:  $\{I\}$ ,  $\{C, \bar{C}\}$ ,  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$
- Für die zweidimensionale Darstellung  $\Gamma^{\textcircled{3}}$  gilt

$$\frac{1}{|G|} (|\chi^{\textcircled{3}}(I)|^2 + |\chi^{\textcircled{3}}(C)|^2 \cdot 2 + |\chi^{\textcircled{3}}(\sigma_1)|^2 \cdot 3) = \frac{2^2 + (-1)^2 \cdot 2 + 0}{6} = 1,$$

d.h.  $\Gamma^{\textcircled{3}}$  ist irreduzibel. (War in 2.4.1 noch offene Frage.)

- Für  $S_3$  haben damit bereits 2 irreduzible Darstellungen gefunden:  
Die triviale Darstellung  $\Gamma^1 := \Gamma^{\textcircled{2}}$  mit  $d_1 = 1$  sowie  $\Gamma^3 := \Gamma^{\textcircled{3}}$  mit  $d_3 = 2$ . Aus

$$\sum_j d_j^2 = |G| \quad (\text{Wir wissen bereits } \leq, \text{ in Abschnitt 2.7 zeigen wir } =.)$$

folgt, dass es noch eine weitere irreduzible Darstellung mit Dimension  $d_2 = 1$  gibt (und sonst keine weiteren). Diese ist

$$\begin{aligned} \Gamma^2(I) &= \Gamma^2(C) = \Gamma^2(\bar{C}) = 1, \\ \Gamma^2(\sigma_1) &= \Gamma^2(\sigma_2) = \Gamma^2(\sigma_3) = -1 \end{aligned}$$

(sign der entsprechenden Permutationen).

- Damit können wir die Charaktertafel von  $D_3 \simeq S_3$  aufstellen:

	$\{I\}$	$\{C, \bar{C}\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$
$\chi^1$	1	1	1
$\chi^2$	1	1	-1
$\chi^3$	2	-1	0

**Bemerkung:** Kennt man die Charaktere aller irreduziblen Darstellungen einer Gruppe, so kann man für eine gegebene (i.A. reduzible) Darstellung ausrechnen, wie oft die einzelnen

irreduziblen Darstellungen in ihr vorkommen:

$$\begin{aligned} \chi(g) &= \sum_j a_j \chi^j(g) \\ &\quad \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{i.A. reduzible} & \text{unbekannt} & \text{bekannt} \\ \text{Darstellung} & & \end{array} \\ \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi^k(g))^* \chi(g) &= \frac{1}{|G|} \sum_j a_j \underbrace{\sum_{g \in G} (\chi^k(g))^* \chi^j(g)}_{=|G|\delta_{jk}} = a_k \\ \text{bzw. } a_k &= \frac{1}{|G|} \sum_c n_c (\chi_c^k)^* \chi_c \end{aligned}$$

Wir nennen  $a_k$  die Multiplizität von  $\Gamma^k$  in  $\Gamma$ .

**Beispiel:** Reduzible Darstellung  $\Gamma^{\textcircled{1}}$  von  $D_3$ :

$$\begin{aligned} \chi(I) &= 3, & \chi(C) &= \chi(\bar{C}) = 0, & \chi(\sigma_1) &= \chi(\sigma_2) = \chi(\sigma_3) = 1, \\ a_1 &= \frac{1}{6} [1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1] = 1, \\ a_2 &= \frac{1}{6} [1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 1] = 0, \\ a_3 &= \frac{1}{6} [1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 1] = 1, \end{aligned}$$

Charaktertafel  
 $n_c$

also  $\Gamma^{\textcircled{1}} = \Gamma^1 \oplus \Gamma^3$  (wie schon zuvor bestimmt).

## 2.7 Die reguläre Darstellung

**Definition:** (Gruppenalgebra)

Für eine endliche Gruppe  $G$ ,  $|G| = n$ , definiert man die Gruppenalgebra  $\mathcal{A}(G)$  als den Vektorraum, der durch die Gruppenelemente aufgespannt wird, d.h. wir bilden formale Linearkombinationen,<sup>12</sup>

$$\mathcal{A}(G) \ni r = \sum_{j=1}^n r_j g_j, \quad r_j \in \mathbb{C},$$

mit der Multiplikationsregel

$$\left( \sum_{j=1}^n r_j g_j \right) \left( \sum_{k=1}^n q_k g_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n r_j q_k g_j g_k.$$

---

<sup>12</sup>mit der offensichtlichen Addition  $\sum_{j=1}^n r_j g_j + \sum_{j=1}^n q_j g_j = \sum_{j=1}^n (r_j + q_j) g_j$

**Bemerkungen:**

1. Wegen  $g_j g_k \in G$  ist das Produkt wieder ein Element von  $\mathcal{A}(G)$ .
2. Eine Matrixdarstellung von  $G$  ist auch eine "Darstellung" von  $\mathcal{A}(G)$ , wobei  $+$  die komponentenweise Addition der Matrizen ist.<sup>13</sup>
3.  $\dim \mathcal{A}(G) = |G|$  (als Vektorraum)
4. Die Multiplikationsregel  $g_j g_k = g_l$  kann man schreiben als

$$g_j g_k = \sum_{m=1}^n g_m (\Delta_j)_{mk}$$

mit  $(\Delta_j)_{mk} = 1$  für  $m = l$  und  $(\Delta_j)_{mk} = 0$  für  $m \neq l$  (und  $j, k$  fest).

5. Die  $n \times n$  Matrizen  $\Delta_j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) mit Elementen

$$(\Delta_j)_{mk} \quad (m, k = 1, \dots, n)$$

bilden eine Darstellung von  $G$ , die sogenannte *reguläre Darstellung*. ( $\Delta_j$  ist die Darstellungsmatrix von  $g_j$ .)

**Beweis:** Seien  $g_a, g_b, g_c \in G$  mit  $g_a g_b = g_c \Rightarrow$

$$\begin{aligned} g_a g_b g_j &= \sum_m g_a g_m (\Delta_b)_{mj} = \sum_{k,m} g_k (\Delta_a)_{km} (\Delta_b)_{mj} \\ g_c g_j &= \sum_k g_k (\Delta_c)_{kj} \end{aligned}$$

Die linken Seiten sind gleich, damit auch die rechten – vergleiche die Koeffizienten von  $g_k$ :

$$\begin{aligned} (\Delta_c)_{kj} &= \sum_m (\Delta_a)_{km} (\Delta_b)_{mj} = (\Delta_a \Delta_b)_{kj} \\ \Leftrightarrow \Delta_c &= \Delta_a \Delta_b \end{aligned}$$

□

---

<sup>13</sup>In Anführungszeichen, da wir nur für Gruppen definiert haben, was eine Darstellung ist.

**Satz 7.** (mit obigen Definitionen) Die reguläre Darstellung enthält alle irreduziblen Darstellungen von  $G$ . Dabei ist die Multiplizität einer irreduziblen Darstellung  $\Gamma^k$  gleich ihrer Dimension  $d_k$ ,

$$\Delta_j = \sum_{k=1 \oplus}^p d_k \Gamma^k(g_j) \quad \left( p = \begin{array}{l} \text{Anzahl der nicht äquivalenten} \\ \text{irreduziblen Darstellungen} \end{array} \right), \quad (*)$$

d.h.  $\exists S$  regulär, so dass

$$S^{-1} \Delta_j S = \left( \begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \Gamma^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma^2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \Gamma^m & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \Gamma^m \end{array} \right).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{d_2 \text{ Blöcke}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{d_m \text{ Blöcke}}$

**Beweis:** Die Charaktere der regulären Darstellung sind

$$\chi^R(g_j) = \sum_k (\Delta_j)_{kk}$$

Für die Identität gilt (natürlich!)

$$I g_j = \sum_{m=1}^n g_m (\Delta_I)_{mj} \quad \Rightarrow \quad (\Delta_I)_{mj} = \delta_{mj} \quad \Rightarrow \quad \chi^R(I) = n.$$

Für  $g_k \neq I$  gilt

$$g_k g_j = \sum_m g_m (\Delta_k)_{mj} \neq g_j \quad \Rightarrow \quad (\Delta_k)_{jj} = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi^R(g_j) = 0.$$

Mit der Formel aus Abschnitt 2.6 (Multiplizität der  $k$ -ten irreduziblen Darstellung) folgt

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_j (\chi^k(g_j))^* \chi^R(g_j) = \frac{1}{n} (\chi^k(I))^* n = d_k$$

□

**Korollar zu Satz 7.** Es gilt

$$\sum_k d_k^2 = n.$$

Dabei war  $d_k$  die Dimensionen der  $k$ -ten irreduziblen Darstellung und  $n = |G|$ .

In Abschnitt 2.5 hatten wir nur  $\leq$  gezeigt.

**Beweis:** Setze  $g_j = I$  in (\*),

$$\Delta_I = \sum_{k \oplus} d_k \Gamma^k(I),$$

und bilde die Spur,

$$\chi^R(I) = \text{tr } \Delta_I = n = \sum_k d_k^2.$$

□

## 2.8 Produktdarstellungen und Clebsch-Gordan-Koeffizienten

In physikalischen Anwendungen hat man oft Vektorräume zu betrachten, die Tensorprodukte sind, wobei auf jedem Faktor eine Darstellung derselben Gruppe operiert.

**Beispiel:** Kopplung von Drehimpulsen, z.B. Bahndrehimpuls und Spin eines Elektrons oder Spins mehrerer Teilchen, – auf jedem Faktor ist eine Darstellung von  $SU(2)$  definiert.

Seien  $U$  und  $V$  Vektorräume mit Basen  $\{u_i\}$  und  $\{v_j\}$  und  $W = U \otimes V$  mit Basis  $\{w_k\}$ , wobei  $w_k = u_i \otimes v_j$  (vgl. Abschnitt 2.4), und seinen  $A : U \rightarrow U$  und  $B : V \rightarrow V$  lineare Abbildungen. Dann ist  $D := A \otimes B$  die lineare Abbildung, mit

$$Dw_k = Au_i \otimes Bv_j, \quad \text{wobei } k = (i, j),$$

und durch Linearität fortgesetzt für beliebige  $w \in W$ , d.h. für  $w = \sum_k \alpha_k w_k$  durch,

$$Dw = \sum_{i,j} \alpha_{ij} Au_i \otimes Bv_j.$$

In Matrixkomponenten:

$$Au_i = \sum_{i'} u_{i'} A_{i'i}, \quad Bv_j = \sum_{j'} v_{j'} B_{j'j} \quad \text{und}$$

$$Dw_k = \sum_{k'} w_{k'} D_{k'k} = \sum_{i'j'} (u_{i'} \otimes v_{j'}) A_{i'i} B_{j'j},$$

d.h.  $D_{k'k} \equiv D_{i'j'i_j} = A_{i'i} B_{j'j}$ . Falls alles endlichdimensional, so gilt

$$\text{tr } D = \sum_k D_{kk} = \sum_{i,j} A_{ii} B_{jj} = \text{tr } A \cdot \text{tr } B = \text{tr}(A \otimes B).$$

Sind auf  $U$  und  $V$  Skalarprodukte definiert, so definiert

$$\langle w_k | w_{k'} \rangle := \langle u_i | u_{i'} \rangle_U \langle v_j | v_{j'} \rangle_V$$

ein Skalarprodukt auf  $U \otimes V$ , das wieder durch (Anti-)Linearität fortgesetzt wird. Sind  $\{u_i\}$  und  $\{v_j\}$  ON-Basen bezüglich  $\langle | \rangle_U$  und  $\langle | \rangle_V$ , so auch  $\{w_k\}$ ,

$$\langle w_k | w_{k'} \rangle = \delta_{ii'} \delta_{jj'} = \delta_{kk'}$$

**Definition:** (Produktdarstellung)

Sind  $\Gamma^\mu : G \rightarrow \text{GL}(U)$  und  $\Gamma^\nu : G \rightarrow \text{GL}(V)$  Darstellungen der Gruppe  $G$ , so ist ihre Produktdarstellung  $\Gamma^{\mu \otimes \nu} : G \rightarrow \text{GL}(U \otimes V)$  definiert durch

$$\Gamma^{\mu \otimes \nu}(g) = \Gamma^\mu(g) \otimes \Gamma^\nu(g) \quad \forall g \in G.$$

**Bemerkungen:**

1.  $\Gamma^{\mu \otimes \nu}$  ist eine Darstellung, denn

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu \otimes \nu}(gh)w_k &= \Gamma^\mu(gh)u_i \otimes \Gamma^\nu(gh)v_j \\ &= \Gamma^\mu(g)\Gamma^\mu(h)u_i \otimes \Gamma^\nu(g)\Gamma^\nu(h)v_j \\ &= \Gamma^{\mu \otimes \nu}(g)(\Gamma^\mu(h)u_i \otimes \Gamma^\nu(h)v_j) \\ &= \Gamma^{\mu \otimes \nu}(g)\Gamma^{\mu \otimes \nu}(h) \underbrace{(u_i \otimes v_j)}_{=w_k} \end{aligned}$$

2. Für die Charaktere gilt

$$\chi^{\mu \otimes \nu}(g) = \text{tr} \Gamma^{\mu \otimes \nu}(g) = \text{tr} (\Gamma^\mu(g) \otimes \Gamma^\nu(g)) = \text{tr} \Gamma^\mu(g) \text{tr} \Gamma^\nu(g) = \chi^\mu(g) \chi^\nu(g).$$

3. Auch für irreduzible  $\Gamma^\mu$  und  $\Gamma^\nu$  ist die Produktdarstellung i.A. reduzibel,

$$\Gamma^\mu \otimes \Gamma^\nu = \sum_{\lambda \oplus} a_\lambda \Gamma^\lambda \quad \text{mit} \quad \sum_{\lambda} a_\lambda d_\lambda = d_\mu d_\nu,$$

wobei  $d_\lambda$  die Dimension von  $\Gamma^\lambda$  ist, und die  $a_\lambda$  folgen aus Abschnitt 2.6 zu

$$a_\lambda = \frac{1}{|G|} \sum_c n_c \chi_c^{\lambda*} \chi_c^\mu \chi_c^\nu,$$

Für das **Beispiel** aus Abschnitt 2.3:

Irreduzible Darstellungen von  $\mathbb{Z}_2$ :

$$\Gamma^1(I) = 1 = \Gamma^1(P) \quad \text{und} \quad \Gamma^2(I) = 1, \quad \Gamma^2(P) = -1.$$

Dort hatten wir auch

$$\Gamma^{\textcircled{3}}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{\textcircled{3}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und  $\Gamma^{\textcircled{5}} = \Gamma^{\textcircled{3}} \otimes \Gamma^{\textcircled{3}} \Rightarrow \chi^{\textcircled{5}}(I) = 2^2 = 4, \chi^{\textcircled{5}}(P) = 0$ . Damit folgt ( $|\mathbb{Z}_2| = 2$ )

$$a_1 = \frac{1}{2}(4 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 2 \quad \text{und}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2}(4 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)) = 2,$$

d.h.  $\Gamma^{\textcircled{3}} \otimes \Gamma^{\textcircled{3}} = 2\Gamma^1 \oplus 2\Gamma^2$  (wie dort explizit bestimmt).



4. Allgemein kann also  $W = U \otimes V$  in eine direkte Summe von (unter  $G$ ) invarianten, irreduziblen Unterräumen  $W_\alpha^\lambda$  zerlegt werden, mit  $\dim(W_\alpha^\lambda) = d_\lambda$ . Der Index  $\alpha = 1, \dots, a_\lambda$  unterscheidet die verschiedenen Unterräume, die zur selben irreduziblen Darstellung gehören, d.h.  $\exists U$ , so dass

$$U^{-1} \Gamma^{\mu \otimes \nu} U = \left( \begin{array}{c} \boxed{\Gamma^1} \\ \dots \\ \boxed{\Gamma^1} \\ \dots \\ \boxed{\Gamma^\lambda} \\ \dots \\ \boxed{\Gamma^\lambda} \\ \dots \end{array} \right) .$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{a_1 \text{ Blöcke}} \quad \dots \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{a_\lambda \text{ Blöcke}}$

$U$  ist also eine Basistransformation von der Produktbasis  $\{w_k\}$  zu einer neuen Basis  $\{w_{\alpha\ell}^\lambda\}$ , in der die Darstellungsmatrizen blockdiagonal sind. Dabei nummeriert  $\ell = 1, \dots, d_\lambda$  die Basisvektoren von  $W_\alpha^\lambda$  durch.

Wählen wir auf beiden Seiten ON-Basen, so ist  $U$  unitär.

Jetzt kommt nur noch viel evt. verwirrende aber nützliche **Notation**.

Mit  $k = (i, j)$  und in Dirac-Notation, schreibt man

$$|w_{\alpha\ell}^\lambda\rangle = \sum_{ij} |w_{ij}\rangle \underbrace{\langle i, j(\mu, \nu)\alpha, \lambda, \ell\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizienten}} . \quad (*)$$

Die *Clebsch-Gordan-Koeffizienten* sind die Matrixelemente von  $U$ , mit

- $(i, j) =$  Zeilenindex (alte Basis),
- $(\alpha, \lambda, \ell) =$  Spaltenindex (neue Basis),
- $(\mu, \nu) =$  fest. (Damit man weiß, welches Produkt zerlegt wurde.)

Die Umkehrung von (\*) ist

$$|w_{ij}\rangle = \sum_{\alpha\lambda\ell} |w_{\alpha\ell}^\lambda\rangle \langle \alpha, \lambda, \ell(\mu, \nu) i, j \rangle ,$$

(das definiert  $\langle \alpha, \lambda, \ell(\mu, \nu) i, j \rangle$ )

und da  $U$  unitär ist, gilt  $\langle \alpha, \lambda, \ell(\mu, \nu) i, j \rangle = \langle i, j(\mu, \nu)\alpha, \lambda, \ell \rangle^*$

- Die CG-Koeffizienten erfüllen die Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsbeziehungen

$$\sum_{\alpha\lambda\ell} \langle i', j'(\mu, \nu)\alpha, \lambda, \ell \rangle \langle \alpha, \lambda, \ell(\mu, \nu)i, j \rangle = \delta_{i'i} \delta_{j'j} \quad \text{und}$$

$$\sum_{ij} \langle \alpha', \lambda', \ell'(\mu, \nu)i, j \rangle \langle i, j(\mu, \nu)\alpha, \lambda, \ell \rangle = \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{\ell'\ell},$$

in Matrixschreibweise  $U^\dagger U = \mathbb{1} = U U^\dagger$ .

- Weitere Vereinfachung der Notation:

- $|i, j\rangle := |w_{ij}\rangle$  und  $|\alpha, \lambda, \ell\rangle := |w_{\alpha\ell}^\lambda\rangle$
- Einsteinsche Summenkonvention (Summation über wiederholte Indizes)
- $\langle i, j(\mu, \nu)\alpha, \lambda, \ell \rangle = \langle i, j|\alpha, \lambda, \ell\rangle$

- Damit gilt

$$\Gamma^{\mu\otimes\nu}(g)|i, j\rangle = |i', j'\rangle \Gamma^\mu(g)_{i'i} \Gamma^\nu(g)_{j'j} \quad \text{und}$$

$$\Gamma^{\mu\otimes\nu}(g)|\alpha, \lambda, \ell\rangle = |\alpha, \lambda, \ell'\rangle \Gamma^\lambda(g)_{\ell\ell'}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \lambda', \ell' | \Gamma^{\mu\otimes\nu}(g) | \alpha, \lambda, \ell \rangle &= \langle \alpha', \lambda', \ell' | \alpha, \lambda, \ell'' \rangle \Gamma^\lambda(g)_{\ell\ell''} = \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\lambda'\lambda} \delta_{\ell'\ell''} \Gamma^\lambda(g)_{\ell\ell''} \\ &= \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{\lambda'\lambda} \Gamma^\lambda(g)_{\ell\ell} \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle \alpha', \lambda', \ell' | \Gamma^{\mu\otimes\nu}(g) | i, j \rangle \langle i, j | \alpha, \lambda, \ell \rangle \\ &= \langle \alpha', \lambda', \ell' | i', j' \rangle \Gamma^\mu(g)_{i'i} \Gamma^\nu(g)_{j'j} \langle i, j | \alpha, \lambda, \ell \rangle \end{aligned}$$

als Beziehung zwischen den Elementen der Darstellungsmatrizen in der alten und neuen Basis.

### Beispiel:

In der Quantenmechanik wird ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen durch einen Vektor in  $\mathbb{C}^2$  beschrieben. Die Basisvektoren

$$|\uparrow\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

transformieren sich unter einer zweidimensionalen Darstellung von  $SU(2)$ , nämlich  $\Gamma^2(g) = g \forall g \in SU(2)$ . Betrachte 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen:  $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$ , aufgespannt durch die Produktbasis

$$|\uparrow\uparrow\rangle := |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \quad |\uparrow\downarrow\rangle := |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle := |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\downarrow\rangle := |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle,$$

transformiert sich unter  $\Gamma^{2\otimes 2}$ . Definiere eine neue Basis durch

$$|0, 0\rangle := \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |1, 1\rangle := |\uparrow\uparrow\rangle, \quad |1, 0\rangle := \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |1, -1\rangle := |\downarrow\downarrow\rangle.$$

In den Übungen zeigen wir:

- $|0, 0\rangle$  transformiert sich unter der Spin-0-Darstellung von  $SU(2)$  (eindimensional – triviale Darstellung), und
- die  $|1, m\rangle$ ,  $m = -1, 0, 1$ , transformieren sich unter der Spin-1-Darstellung (dreidimensional) von  $SU(2)$ .

Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

	$ \uparrow\uparrow\rangle$	$ \uparrow\downarrow\rangle$	$ \downarrow\uparrow\rangle$	$ \downarrow\downarrow\rangle$
$\langle 0, 0 $	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\langle 1, 1 $	1	0	0	0
$\langle 1, 0 $	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\langle 1, -1 $	0	0	0	1

d.h. z.B.  $\langle 1, 0|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Allgemein nummeriert man die unitären irreduziblen Darstellungen von  $SU(2)$  in der Quantenmechanik durch die Spinquantenzahl  $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$  – die zugehörige Darstellung hat dann Dimension  $2s + 1$ .

### 3 Anwendungen in der Quantenmechanik

Im Folgenden zeigen wir, welche Konsequenzen die Orthogonalitätsbeziehungen für irreduzible Darstellungen für die Entartungen quantenmechanischer Energie-Niveaus haben.

#### 3.1 Entwicklung in irreduzible Basisfunktionen

In der Quantenmechanik (QM) betrachtet man Vektorräume (Hilberträume) der Art  $V = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^n$ , d.h.  $\mathbb{C}^n$ -wertige quadratintegrale Funktionen in  $d$  Variablen, z.B.  $d = 3$  und  $n = 2s + 1$  für ein Teilchen mit Spin  $s$ , das sich im dreidimensionalen Raum bewegt ( $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ : Position des Teilchens).

Skalarprodukt:  $\psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{C}^n$ ,

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \sum_{m=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} \psi_m(x)^* \varphi_m(x) d^d x.$$

Ein Operator  $A : V \rightarrow V$  heißt *unitär*, wenn er Skalarprodukte invariant lässt, d.h.

$$\langle A\psi | A\varphi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle \quad \forall \psi, \varphi \in V.$$

**Lemma 8.** Sei  $G$  eine Gruppe linearer, unitärer Operatoren,  $A \in G$ ,<sup>14</sup> und seien  $\psi_1^\nu, \dots, \psi_{d_\nu}^\nu$  Funktionen, die sich in der unitären, irreduziblen Darstellung  $\Gamma^\nu(G)$  transformieren (mit  $\dim(\Gamma^\nu) = d_\nu$ ), d.h.

$$A\psi_\alpha^\nu = \sum_{\beta=1}^{d_\nu} \psi_\beta^\nu \Gamma^\nu(A)_{\beta\alpha} \tag{*}$$

Analog sollen sich die Funktionen  $\varphi_1^{\nu'}, \dots, \varphi_{d_{\nu'}}^{\nu'}$  in der unitären, irreduziblen Darstellung  $\Gamma^{\nu'}(G)$  transformieren. (Die  $\psi_\alpha^\nu$  und  $\varphi_{\alpha'}^{\nu'}$  haben also spezielle Symmetrieeigenschaften bezüglich der Gruppe. Falls  $\nu \neq \nu'$ , haben  $\psi_\alpha^\nu$  und  $\varphi_{\alpha'}^{\nu'}$  verschiedene Symmetrieeigenschaften.) Dann gilt

$$\langle \psi_\alpha^\nu | \varphi_{\alpha'}^{\nu'} \rangle = C \delta_{\nu\nu'} \delta_{\alpha\alpha'}, \tag{+}$$

wobei  $C$  nicht von  $\alpha$  abhängt (aber i.A. von  $\nu$ ). Insbesondere sind Funktionen mit verschiedenen Symmetrieeigenschaften orthogonal zueinander.

---

<sup>14</sup>Alternativ: Betrachte die Operatoren  $A$  als unitäre Darstellung einer Gruppe  $G$  auf  $V$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
\langle \psi'_\alpha | \varphi'_{\alpha'} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \langle A \psi'_\alpha | A \varphi'_{\alpha'} \rangle \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \left\langle \sum_{\beta=1}^{d_\nu} \psi'_\beta \Gamma^\nu(A)_{\beta\alpha} \middle| \sum_{\beta'=1}^{d_{\nu'}} \varphi'_{\beta'} \Gamma^{\nu'}(A)_{\beta'\alpha'} \right\rangle \\
&= \sum_{\beta, \beta'} \frac{1}{|G|} \underbrace{\sum_{A \in G} (\Gamma^\nu(A)_{\beta\alpha})^* \Gamma^{\nu'}(A)_{\beta'\alpha'}}_{= \frac{1}{d_\nu} \delta_{\nu\nu'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\alpha\alpha'} \text{ (Satz 6)}} \langle \psi'_\beta | \varphi'_{\beta'} \rangle \\
&= \delta_{\nu\nu'} \delta_{\alpha\alpha'} \underbrace{\frac{1}{d_\nu} \sum_{\beta} \langle \psi'_\beta | \varphi'_\beta \rangle}_{= C \text{ (unabhängig von } \alpha)}
\end{aligned}$$

□

**Bemerkungen:**

1. Damit kann nun eine beliebige Funktion  $\psi \in V$  als Linearkombination der Funktionen mit speziellen Symmetrieeigenschaften (= invariante Basisfunktionen) geschrieben werden, denn

- (i) Betrachte den invarianten Unterraum  $U \subset V$ , der durch die Bilder von  $\psi$  unter Anwendung aller  $A \in G$  aufgespannt wird, d.h.

$$U = \text{span}(\{\varphi \mid \exists A \in G : \varphi = A\psi\}).$$

$U$  ist offensichtlich invariant unter  $G$ , und  $\psi \in U$ .

- (ii) Zerlege nun  $U$  in invariante Unterräume (diese tragen irreduzible Darstellungen von  $G$ ), und entwickle  $\psi$  in Basen der invarianten Unterräume.

Welche irreduziblen Darstellungen und damit welche Basisfunktionen dabei auftreten hängt von  $\psi$  ab.

2. Beziehungen wie (+) werden auch *Auswahlregeln* genannt. Eine Auswahlregel legt fest, welche Übergänge nicht stattfinden können, da das Übergangsmatrixelement bereits aus Symmetriegründen verschwindet.

## 3.2 Invarianz des Hamilton-Operators und Entartungen

Eine besondere Rolle spielt der Hamilton-Operator  $H : V \rightarrow V$  eines quantenmechanischen Systems, z.B. sind seine Eigenwerte die möglichen Energieniveaus, in denen sich das System befinden kann.

- Sei  $H$  der Hamilton-Operator eines quantenmechanischen Systems und  $A$  ein unitärer Operator. Falls

$$AH = HA,$$

so sagen wir  $A$  vertauscht mit dem Hamiltonoperator bzw.  $A$  lässt  $H$  invariant.

- Die Menge aller Symmetrieoperationen (realisiert durch unitäre Operatoren  $A_j$ ) die  $H$  invariant lassen (d.h.  $AH = HA$ ), bildet eine Gruppe  $G$ , die *Symmetriegruppe* von  $H$ , denn

$$\begin{aligned} A_1H &= HA_1, & A_2H &= HA_2 \\ \Rightarrow & (A_1A_2)H &= A_1A_2H &= A_1HA_2 = HA_1A_2 = H(A_1A_2). \end{aligned}$$

- Nun sei  $A \in G$  und  $|\psi\rangle$  ein Eigenzustand von  $H$  mit Energie  $E$

$$\begin{aligned} H|\psi\rangle &= E|\psi\rangle \\ \Rightarrow H(A|\psi\rangle) &= AH|\psi\rangle = E(A|\psi\rangle) \end{aligned} \quad (*)$$

d.h.  $A|\psi\rangle$  ist auch ein Eigenzustand von  $H$  mit Energie  $E$ .

- Falls  $E$  nicht entartet ist, so ist  $A|\psi\rangle \propto |\psi\rangle$ .

Ist  $E$   $m$ -fach entartet, so ist  $A|\psi\rangle$  eine Linearkombination der Zustände  $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_m\rangle$  mit Energie  $E$ .

In beiden Fällen ist der Raum  $\mathcal{S} = \text{span}(|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_m\rangle)$  invariant unter der Symmetriegruppe von  $H$ .

$\Rightarrow$  Die entarteten Zustände  $|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_m\rangle$  transformieren sich unter einer Darstellung von  $G$ ,

$$A|\psi_j\rangle = \sum_{k=1}^m \Gamma(A)_{kj} |\psi_k\rangle, \quad j = 1, \dots, m, \quad A \in G. \quad (+)$$

Diese Darstellung kann im Prinzip reduzibel oder irreduzibel sein, ist aber im typischerweise irreduzibel:

- (i) Alle Zustände, die sich in derselben irreduziblen Darstellung von  $G$  transformieren, müssen dieselbe Energie haben, denn

$$\begin{aligned} H|\psi_j\rangle &= E_j|\psi_j\rangle \\ \Rightarrow_{(*)} H(A|\psi_j\rangle) &= E_j(A|\psi_j\rangle) \\ \Rightarrow_{(+)} H(A|\psi_j\rangle) &= \sum_k \Gamma(A)_{kj} \underbrace{H|\psi_k\rangle}_{=E_k|\psi_k\rangle} = \sum_k \Gamma(A)_{kj} E_k |\psi_k\rangle = E_j(A|\psi_j\rangle) \quad (\text{mit } \Gamma \text{ irreduzibel}) \\ \Rightarrow \Gamma(A)_{kj} E_k &= \Gamma(A)_{kj} E_j \quad (\text{keine Summen über } j \text{ oder } k) \end{aligned}$$

Nun definiere eine  $m \times m$  Diagonalmatrix  $E = \text{diag}(E_1, \dots, E_m)$

$$\begin{aligned} [\Gamma(A)E]_{kj} &= \Gamma(A)_{k\ell} E_{\ell j} = \Gamma(A)_{kj} E_j \\ [E\Gamma(A)]_{kj} &= E_{k\ell} \Gamma(A)_{\ell j} = E_k \Gamma(A)_{kj} = \Gamma(A)_{kj} E_k \\ \Rightarrow \Gamma(A)E &= E\Gamma(A) \quad \forall j, \end{aligned}$$

d.h. laut 1. Schurschem Lemma (Satz 4) ist  $E$  proportional zu  $\mathbb{1}_m \Rightarrow$  alle  $E_j$  sind gleich.

- (ii) Falls  $\Gamma$  reduzibel ist und  $|\psi_j\rangle$  und  $|\psi_k\rangle$  sich in verschiedenen irreduziblen Darstellungen transformieren,

$$\begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right) & 0 \\ 0 & \left( \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow j \\ \leftarrow k \end{array}$$

so ist  $\Gamma(A)_{ki} = 0$  für alle  $A$  und wir können *nicht*  $E_k = E_j$  schlußfolgern, d.h. es gibt keinen Grund, warum  $|\psi_j\rangle$  und  $|\psi_k\rangle$  entartet sein sollten!

- (iii) Falls Zustände, die zu verschiedenen irred. Darstellungen gehören, trotzdem dieselbe Energie haben, spricht man von “zufälliger Entartung”. Diese kann zwei Gründe haben:

1. “fine-tuning” eines Parameters in  $H$  (höchst unwahrscheinlich).
2. Man hat die volle Symmetriegruppe noch nicht gefunden (also das Problem noch nicht vollständig verstanden).

- Wir lernen daraus:

- Die entarteten Zustände zu einer bestimmten Energie transformieren sich in einer irreduziblen Darstellung der Symmetriegruppe von  $H$  (können also mit Hilfe der irreduziblen Darstellungen klassifiziert werden).
- Anzahl der entarteten Zustände = Dimension der irreduziblen Darstellung

### Beispiel: Wasserstoff-Atom

Zunächst Elektron-Spin vernachlässigt (d.h. ohne Spin-Bahn Kopplung),  $V = L^2(\mathbb{R}^3)$ ,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{r},$$

wobei  $r = |\vec{x}|$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ .

- Die Eigenzustände sind charakterisiert durch Quantenzahlen (QZ)
  - $n = 1, 2, \dots$  (Haupt-QZ),
  - $\ell = 0, \dots, n - 1$  (Drehimpuls-QZ) und
  - $m = -\ell, \dots, \ell$  (Richtungs-QZ /  $z$ -Komponente des Drehimpulses),

$$\psi(\vec{x}) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi).$$

- Der Hamilton-Operator für ein Zentralkraftproblem, also  $V(\vec{x}) = f(|\vec{x}|)$  in 3 Dimensionen ist invariant unter  $O(3)$ . Die Zustände für festes  $\ell$  (und  $n$ ) transformieren sich unter einer  $(2\ell + 1)$ -dim. irreduziblen Darstellung von  $O(3)$  (klassifizieren wir später noch), d.h. die Energie hängt nicht von  $m$  ab  $\Rightarrow (2\ell + 1)$ -fache Entartung.
- Beobachtung: Die Energie hängt aber auch nicht von  $\ell$  ab (“zufällige Entartung”)  $\Rightarrow n^2$ -fache Entartung, denn  $\sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2$ .

Erklärung: Die Symmetriegruppe ist größer als bisher angenommen: Für  $f(r) \propto \frac{1}{r}$  (Coulomb-Potential) ist  $H$  sogar invariant unter  $O(4)$  ( $H$  kommutiert mit dem Runge-Lenz Vektor)  $\Rightarrow$  Energie hängt nicht von  $\ell$  ab, und die  $n^2$ -fache Entartung, entspricht den Dimensionen der irreduziblen Darstellungen von  $O(4)$ .

### 3.3 Störungstheorie und Aufhebung der Entartung

- Typisches Problem:

$$H = H_0 + H',$$

mit  $H_0$  “lösbar” und  $H'$  “kleine Störung”

- Die Symmetriegruppe von  $H_0$  sei  $G$ . Dann gibt es zwei Fälle:
  1.  $H'$  ist auch invariant unter  $G$ .
  2.  $H'$  ist nur invariant unter einer Untergruppe  $B \subset G$ .
- Im Fall 1 führt die Störung  $H'$  nicht zu einer Abspaltung der entarteten Zustände von  $H_0$ .
- Fall 2. führt zu einer Aufspaltung:
  - Die exakten Zustände von  $H$  transformieren sich in irreduziblen Darstellungen von  $B$ .
  - Die entarteten Zustände von  $H_0$  transformieren sich in irreduziblen Darstellungen von  $G$ .
  - Dabei bilden die Matrizen, die den Elementen von  $B$  entsprechen, eine Darstellung  $\Gamma(B)$  von  $B$ , diese ist i.A. reduzibel, d.h.

$$\Gamma(B) = \sum_{j \oplus=1}^r a_j \Gamma^j(B) \quad \text{mit} \quad \dim(\Gamma^j) = d_j.$$

- Zustände, die sich unter einer irreduziblen Darstellung von  $B$  transformieren, sind weiterhin entartet. Zustände, die sich unter unterschiedlichen irreduziblen



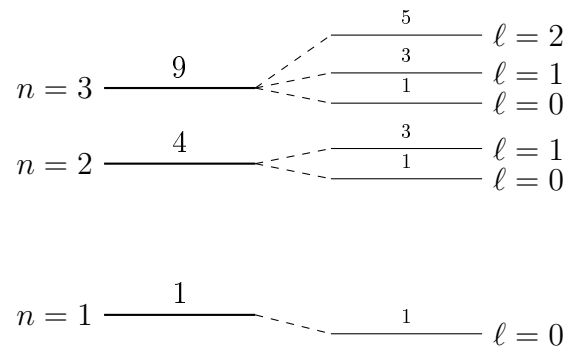
Darstellungen von  $B$  transformieren, gehören i.A. zu unterschiedlichen Energien, d.h. die bisher entarteten Niveaus spalten auf:

$\Rightarrow \sum_i a_i$  neue Energieniveaus  
 $a_1$  davon sind jeweils  $d_1$ -fach entartet,  
 $a_2$  davon sind jeweils  $d_2$ -fach entartet, usw.

### Beispiele:

#### 1. Wasserstoff-Atom wie in Abschnitt 3.2

Fügt man ein kleines radialsymmetrisches Potential  $V(r)$  (aber nicht  $\frac{1}{r}$ ) hinzu, so wird die  $O(4)$ -Symmetrie zu  $O(3)$  gebrochen und jedes Energieniveau in  $n$  Niveaus mit verschiedenen Werten von  $\ell$  aufgespalten.



Jedes der neuen Niveaus ist  $(2\ell+1)$ -fach entartet, da  $H'$  immer noch  $O(3)$  Symmetrie hat.

#### 2. Feinstruktur im Wasserstoff-Atom

- Berücksichtige den Spin des Elektrons: Statt  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . betrachte nun  $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$
- Zwischenschritt: Betrachte den gleichen Hamiltonoperator wie oben (genauer  $H \rightarrow H \otimes \mathbb{1}_2$ ). Zustände, die sich bisher unter  $\Gamma^{2l+1}(O(3))$  transformiert haben, transformieren sich nun unter  $\Gamma^{2l+1} \otimes \Gamma^2$ .
- Addiere nun die Störung  $H'$ , die u.a. aus Spin-abhängigen Termen (Spin-Bahn-Kopplung) besteht, aber immer noch invariant unter  $O(3)$  ist. Mit

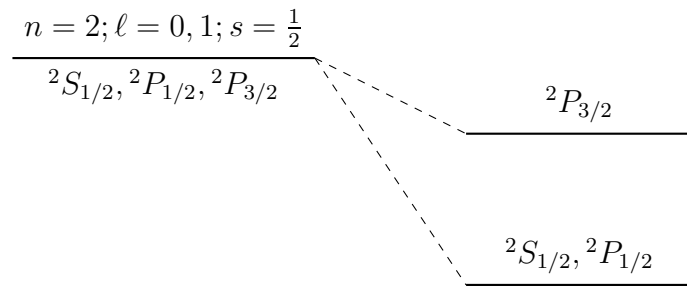
$$\Gamma^{2l+1} \otimes \Gamma^2 = \Gamma^{2l} \oplus \Gamma^{2l+2}$$

liefert dies Zustände, die sich unter einem der beiden Summanden transformieren. Man nennt  $j = l \pm \frac{1}{2}$  die Gesamtdrehimpuls-QZ,

$$2j + 1 = 2(l \pm \frac{1}{2}) + 1 = \begin{cases} 2l + 2 \\ 2l \end{cases} .$$

Zum Beispiel für  $n = 2, l = 0, 1$ :

$$\underbrace{\Gamma^1 \otimes \Gamma^2}_{\text{s-Orbital, } l=0} \oplus \underbrace{\Gamma^3 \otimes \Gamma^2}_{\text{p-Orbital, } l=1} = \underbrace{\Gamma^2 \oplus \Gamma^2}_{\substack{\text{immer noch zufällig entartet,} \\ \text{Symmetriegruppe immer noch} \\ \text{größer als } O(3)}} \oplus \Gamma^4$$



Feinstruktur  
(Spin-Bahn-Kopplung u.a.)

## 4 Entwicklung in irreduzible Basisvektoren

### 4.1 Projektionsoperatoren auf irreduzible Basen

Wir greifen Bemerkung 1 nach Lemma 8 auf: Sei  $U(G)$  eine Darstellung (z.B. durch unitäre Operatoren) auf  $V$  und seien  $e_1^\nu, \dots, e_{d_\nu}^\nu \in V$  Funktionen, die sich in der unitären, irreduziblen Darstellung  $\Gamma^\nu(G)$  transformieren (mit  $\dim(\Gamma^\nu) = d_\nu$ ). Gemäß Bemerkung 1 nach Lemma 8 können wir jedes  $\psi \in V$  in solche Basisvektoren entwickeln, d.h.

$$\psi = \sum_{\mu} \sum_{\beta=1}^{d_{\mu}} c_{\beta}^{\mu} e_{\beta}^{\mu},$$

mit Entwicklungskoeffizienten  $c_{\beta}^{\mu} \in \mathbb{C}$ . Es gilt also

$$U(g)\psi = \sum_{\mu} \sum_{\alpha, \beta} c_{\beta}^{\mu} e_{\alpha}^{\mu} \Gamma^{\mu}(g)_{\alpha\beta},$$

und mit Satz 6 folgt

$$\frac{d_{\mu'}}{|G|} \sum_{g \in G} (\Gamma^{\mu'}(g)_{\alpha'\beta'})^* U(g)\psi = \sum_{\mu} \sum_{\alpha, \beta} c_{\beta}^{\mu} e_{\alpha}^{\mu} \underbrace{\frac{d_{\mu'}}{|G|} \sum_{g \in G} (\Gamma^{\mu'}(g)_{\alpha'\beta'})^* \Gamma^{\mu}(g)_{\alpha\beta}}_{=\delta_{\mu\mu'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\beta\beta'}} = c_{\beta'}^{\mu'} e_{\alpha'}^{\mu'}$$

Halte  $\mu'$  und  $\beta'$  fest und wende nacheinander

$$\frac{d_{\mu'}}{|G|} \sum_{g \in G} (\Gamma^{\mu'}(g)_{\alpha'\beta'})^* U(g), \quad \alpha' = 1, \dots, d_{\mu'},$$

auf  $\psi$  an: Liefert entweder immer Null (falls  $c_{\beta'}^{\mu'} = 0$ ) oder nacheinander  $d_{\mu'}$  Basisfunktionen, die sich unter  $\Gamma^{\mu'}(G)$  transformieren (falls  $c_{\beta'}^{\mu'} \neq 0$ ).

Dies motiviert die folgende Definition.

**Definition:** (Verallgemeinerte Projektionsoperatoren)

Sei  $G$  eine Gruppe,  $U(G)$  eine Darstellung,  $\Gamma^{\mu}(G)$  eine irreduzible Darstellung,  $\dim \Gamma^{\mu} = d_{\mu}$ . Wir nennen

$$P_{jk}^{\mu} := \frac{d_{\mu}}{|G|} \sum_{g \in G} [\Gamma^{\mu}(g)^{-1}]_{jk} U(g)$$

verallgemeinerte Projektionsoperatoren.

**Bemerkung:** Im Folgenden sei  $\Gamma$  stets unitär, d.h.

$$[\Gamma^{\mu}(g)^{-1}]_{jk} = [\Gamma^{\mu}(g)^{\dagger}]_{jk} = (\Gamma^{\mu}(g)_{kj})^* \quad (\text{vgl. mit oben}).$$

**Satz 9. (Eigenschaften der  $P_{jk}^\mu$ )** Mit obigen Definitionen gilt:

(i) Für festes  $\psi \in V$  sowie feste  $\mu$  und  $j$  sind die  $d_\mu$  Vektoren  $P_{jk}^\mu \psi$ ,  $k = 1, \dots, d_\mu$ , entweder alle Null, oder sie transformieren sich in der irreduziblen Darstellung  $\Gamma^\mu$ .

$$\text{Kurz: } U(g)P_{jk}^\mu = \sum_{\ell} P_{j\ell}^\mu \Gamma^\nu(g)_{\ell k}.$$

$$(ii) P_{ji}^\mu P_{\ell k}^\nu = \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} P_{\ell i}^\mu$$

(iii)  $P_j^\mu := P_{jj}^\mu$  ist Projektionsoperator auf  $\text{span}(e_j^\mu)$ .

(iv)  $P^\mu := \sum_j P_j^\mu$  ist Projektionsoperator auf den invarianten Unterraum  $U_\mu$  (aufgespannt durch die  $e_j^\mu$ ,  $j = 1, \dots, d_\mu$ ).

(v)  $\sum_\mu P^\mu = \mathbb{1}$  falls  $V$  vollständig reduzibel (nehmen wir hier immer an)

(vi)  $U(g) = \sum_\mu \sum_{j,k} \Gamma^\mu(g)_{kj} P_{jk}^\mu$  (Umkehrung der Definition)

**Beweis:**

(i) s.o.

(ii) Zunächst: Wirkung verallgemeinerter Projektionsoperatoren auf irreduzible Basis,

$$\begin{aligned} P_{ji}^\mu e_k^\nu &= \frac{d_\mu}{|G|} \sum_{g \in G} (\Gamma^\mu(g)_{ij})^* U(g) e_k^\nu = \sum_{\ell} \frac{d_\mu}{|G|} \underbrace{\sum_{g \in G} (\Gamma^\mu(g)_{ij})^* \Gamma^\nu(g)_{\ell k}}_{=\delta_{\mu\nu} \delta_{i\ell} \delta_{jk}} e_\ell^\nu \\ &= \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} e_i^\mu. \end{aligned} \quad (*)$$

Mit  $\psi \in V$  beliebig gilt wegen (i): Die  $\varphi_k^\nu := P_{\ell k}^\nu \psi$  transformieren sich unter  $\Gamma^\nu$ ,

$$\Rightarrow P_{ji}^\mu P_{\ell k}^\nu \psi = P_{ji}^\mu \varphi_k^\nu \stackrel{(*)}{=} \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} \varphi_i^\mu = \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} \varphi_i^\mu = \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} P_{\ell i}^\nu \psi$$

(iii)

$$P_j^\mu P_k^\nu = P_{jj}^\mu P_{kk}^\nu \stackrel{(ii)}{=} \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} P_{jj}^\mu = \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} P_j^\mu$$

(iv)

$$P^\mu P^\nu = \sum_{j,k} P_j^\mu P_k^\nu \stackrel{(iii)}{=} \sum_{j,k} \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} P_j^\mu = \delta_{\mu\nu} \sum_j P_j^\mu = \delta_{\mu\nu} P^\mu$$

(v)

$$\sum_\mu P^\mu e_k^\nu = \sum_\mu \sum_j P_{jj}^\mu e_k^\nu = \sum_\mu \sum_j \delta_{\mu\nu} \delta_{jk} e_j^\mu = e_k^\nu$$

für beliebige  $\nu$  und  $k \Rightarrow \sum_\mu P^\mu = \mathbb{1}$

(vi) Mit  $\psi \in V$  beliebig gilt wegen (i): Die  $\varphi_k^\mu := P_{jk}^\mu \psi$  transformieren sich unter  $\Gamma^\mu$ ,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\mu} \sum_{j,k} \Gamma^\mu(g)_{kj} P_{jk}^\mu \psi &= \sum_{\mu} \sum_{j,k} \Gamma^\mu(g)_{kj} \varphi_k^\mu = \sum_{\mu} \sum_j U(g) \varphi_j^\mu \\ &= U(g) \sum_{\mu} \sum_j P_{jj}^\mu \psi = U(g) \psi \end{aligned}$$

□

### Beispiele:

1. Reduzierung des Raumes  $\mathcal{S} = \text{span}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  aus Abschnitt 2.4.1 (invariant unter  $D_3 \cong S_3$ )

- $S_3$  hat zwei 1-dim. und eine 2-dim. irreduzible Darstellung ( $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$ ).
- Die verallgemeinerten Projektionsoperatoren sind

$$\begin{aligned} P_{11}^1 &= \frac{1}{6} (O_I + O_C + O_{\bar{C}} + O_{\sigma_1} + O_{\sigma_2} + O_{\sigma_3}) , \\ P_{11}^2 &= \frac{1}{6} (O_I + O_C + O_{\bar{C}} - O_{\sigma_1} - O_{\sigma_2} - O_{\sigma_3}) , \\ P_{11}^3 &= \frac{1}{3} \left( O_I - \frac{1}{2} O_C - \frac{1}{2} O_{\bar{C}} - O_{\sigma_1} + \frac{1}{2} O_{\sigma_2} + \frac{1}{2} O_{\sigma_3} \right) , \\ P_{12}^3 &= \frac{1}{3} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} O_C + \frac{\sqrt{3}}{2} O_{\bar{C}} - \frac{\sqrt{3}}{2} O_{\sigma_2} + \frac{\sqrt{3}}{2} O_{\sigma_3} \right) , \\ P_{21}^3 &= \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} O_C - \frac{\sqrt{3}}{2} O_{\bar{C}} - \frac{\sqrt{3}}{2} O_{\sigma_2} + \frac{\sqrt{3}}{2} O_{\sigma_3} \right) \text{ und} \\ P_{22}^3 &= \frac{1}{3} \left( O_I - \frac{1}{2} O_C - \frac{1}{2} O_{\bar{C}} + O_{\sigma_1} - \frac{1}{2} O_{\sigma_2} - \frac{1}{2} O_{\sigma_3} \right) . \end{aligned}$$

- Angewandt auf einen Vektor in  $\mathcal{S}$ , z.B.  $\phi_1$  (siehe Abschnitt 2.4.1 für die Wirkung der  $O_A$ -Operatoren auf  $\phi_1$ ):

–  $\mu = 1$  :

$$P_{11}^1 \phi_1 = \frac{1}{6} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_1 + \phi_3 + \phi_2) = \frac{1}{3} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) ,$$

invariant unter  $D_3$  und transformiert sich in der trivialen Darstellung  $\Gamma^1$ .

–  $\mu = 2$  :

$$P_{11}^2 \phi_1 = \frac{1}{6} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 - \phi_1 - \phi_3 - \phi_2) = 0 ,$$

musste Null sein, denn  $\Gamma^2$  ist in der 3-dim. Darstellung  $\Gamma^{\textcircled{1}}$  nicht enthalten.

–  $\mu = 3$  : zunächst  $j = 1$ ,

$$P_{11}^3 \phi_1 = \frac{1}{3} \left( \phi_1 - \frac{1}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \phi_3 - \phi_1 + \frac{1}{2} \phi_3 + \frac{1}{2} \phi_2 \right) = 0,$$

$$P_{12}^3 \phi_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} (-\phi_2 + \phi_3 - \phi_3 + \phi_2) = 0 \quad (\text{ist eine Null, so auch die andere})$$

nun  $j = 2$ ,

$$P_{21}^3 \phi_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} (\phi_2 - \phi_3 - \phi_3 + \phi_2) \propto \phi_2 - \phi_3,$$

$$P_{22}^3 \phi_1 = \frac{1}{3} \left( \phi_1 - \frac{1}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \phi_3 + \phi_1 - \frac{1}{2} \phi_3 - \frac{1}{2} \phi_2 \right) \propto 2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3.$$

Die letzten beiden Funktionen transformieren sich unter  $\Gamma^3$ .

Dies war die Basistransformation aus Abschnitt 2.4.1.

## 2. Reduzierung einer Produktdarstellung

- Sei  $\Gamma^{\mu \otimes \nu}$  eine Produktdarstellung von  $G$  auf  $V_\mu \otimes V_\nu$ , i.A. ist  $\Gamma^{\mu \otimes \nu} = \sum_{\lambda \oplus} a_\lambda \Gamma^\lambda$ .  
Wie findet man die irreduziblen Unterräume von  $V_\mu \otimes V_\nu$ ?
- Beginne mit einer Produktbasis  $|k, \ell\rangle = |e_k^\mu\rangle \otimes |e_\ell^\nu\rangle$  und wende die verallgemeinerten Projektionsoperatoren  $P_{ji}^\lambda$  auf diese an.
- Für festes  $\lambda, j, k, \ell$  sind die  $d_\lambda$  Vektoren

$$P_{ji}^\lambda |k, \ell\rangle, \quad i = 1, \dots, d_\lambda,$$

entweder alle Null, oder sie spannen einen irreduziblen Unterraum auf.

- Indem man  $\lambda, j, k, \ell$  variiert, kann man alle irreduziblen Unterräume finden.
- Übungen: Reduzierung von  $\Gamma^{3 \otimes 3}(S_3)$  ( $\dim \Gamma^3 = 2$ ).

### Zusammenfassung:

- Zerlege den Raum  $V$  in irreduzible Unterräume,  $V = \sum_{\mu, \alpha \oplus} V_\alpha^\mu$   
( $\mu$  bezeichnet die irreduzible Darstellung,  
 $\alpha$  zählt durch, wie oft die Darstellung  $\mu$  vorkommt).
- Wähle in  $V$  die Basis  $|\alpha, \mu, i\rangle$ , jeweils  $i = 1, \dots, d_\mu$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} P^\mu |\alpha, \nu, k\rangle &= |\alpha, \mu, k\rangle \delta_{\mu\nu}, \\ P_i^\mu |\alpha, \nu, k\rangle &= |\alpha, \mu, i\rangle \delta_{\mu\nu} \delta_{ik} \quad \text{und} \\ P_{ij}^\mu |\alpha, \nu, k\rangle &= |\alpha, \mu, i\rangle \delta_{\mu\nu} \delta_{jk}. \end{aligned}$$

## 4.2 Irreduzible Operatoren und das Wigner-Eckart-Theorem

**Definition:** (Irreduzible Operatoren)

Sei  $G$  eine Gruppe,  $U(G)$  eine Darstellung und  $\Gamma^\mu(G)$  eine unitäre, irreduzible Darstellung,  $\dim \Gamma^\mu = d_\mu$ . Eine Menge linearer Operatoren  $\{O_i^\mu : i = 1, \dots, d_\mu\}$ , die sich unter  $G$  wie folgt transformieren,

$$U(g)O_i^\mu U(g)^{-1} = \sum_{j=1}^{d_\mu} O_j^\mu \Gamma^\mu(g)_{ji},$$

heißen irreduzible Operatoren zur Darstellung  $\mu$  (auch irreduzible Tensoren oder Tensoroperatoren).

**Bemerkungen:**

1. Die Definition ist sinnvoll, denn

$$\begin{aligned} U(gh)O_i^\mu U(gh)^{-1} &= U(g)U(h)O_i^\mu U(h)^{-1}U(g)^{-1} = U(g) \sum_j O_j^\mu \Gamma^\mu(h)_{ji} U(g)^{-1} \\ &= \sum_{j,k} O_k^\mu \Gamma^\mu(g)_{kj} \Gamma^\mu(h)_{ji} = \sum_k O_k^\mu \Gamma^\mu(gh)_{ki}. \end{aligned}$$

2. Spezialfall: Ist  $\Gamma^\mu$  die triviale Darstellung, so vertauschen die Operatoren  $O_i^\mu$  mit  $U(g)$ , vgl. Abschnitt 3.2.
3. Sind  $O_i^\mu$ ,  $i = 1, \dots, d_\mu$ , irreduzible Operatoren und  $|e_j^\nu\rangle$ ,  $j = 1, \dots, d_\nu$ , irreduzible Basisvektoren, so transformieren sich die Vektoren  $O_i^\mu |e_j^\nu\rangle$  in der Produktdarstellung  $\Gamma^{\mu \otimes \nu}$ , denn

$$\begin{aligned} U(g)O_i^\mu |e_j^\nu\rangle &= U(g)O_i^\mu U(g)^{-1}U(g)|e_j^\nu\rangle \\ &= \sum_{k,\ell} O_k^\mu |e_\ell^\nu\rangle \Gamma^\mu(g)_{ki} \Gamma^\nu(g)_{\ell j}. \end{aligned}$$

Diese Produktdarstellung können wir reduzieren (vgl. Abschnitt 2.8) und die Vektoren  $O_i^\mu |e_j^\nu\rangle$  in die irreduzible Basis  $\{|w_{\alpha\ell}^\lambda\rangle\}$  entwickeln,

$$O_i^\mu |e_j^\nu\rangle = \sum_{\alpha\lambda\ell} |w_{\alpha\ell}^\lambda\rangle \langle \alpha, \lambda, \ell(\mu, \nu) | i, j \rangle$$

Daraus folgt...

**Satz 10. (Wigner-Eckart-Theorem)**

Seien  $O_i^\mu$  irreduzible Operatoren und  $|e_j^\nu\rangle$  irreduzible Vektoren (s.o.), dann gilt

$$\langle e_\ell^\lambda | O_i^\mu | e_j^\nu \rangle = \sum_\alpha \langle \alpha, \lambda, \ell(\mu, \nu) | i, j \rangle \langle \lambda || O^\mu || \nu \rangle_\alpha$$

mit dem reduzierten Matrixelement (eigentlich gar kein Matrixelement)

$$\langle \lambda || O^\mu || \nu \rangle_\alpha := \frac{1}{d_\lambda} \sum_k \langle e_k^\lambda | w_{\alpha k}^\lambda \rangle.$$

**Beweis:**

$$\langle e_\ell^\lambda | O_i^\mu | e_j^\nu \rangle \stackrel{(*)}{=} \sum_{\alpha, \rho, m} \langle e_\ell^\lambda | w_{\alpha m}^\rho \rangle \langle \alpha, \rho, m(\mu, \nu) | i, j \rangle$$

Aus dem Beweis von Lemma 8 (Abschnitt 3.1) wissen wir

$$\langle e_\ell^\lambda | w_{\alpha m}^\rho \rangle = \delta_{\rho\lambda} \delta_{m\ell} \frac{1}{d_\lambda} \sum_k \langle e_k^\lambda | w_{\alpha k}^\lambda \rangle,$$

und damit folgt

$$\langle e_\ell^\lambda | O_i^\mu | e_j^\nu \rangle = \sum_\alpha \frac{1}{d_\lambda} \underbrace{\sum_k \langle e_k^\lambda | w_{\alpha k}^\lambda \rangle}_{= \langle \lambda | | O^\mu | | \nu \rangle_\alpha} \langle \alpha, \lambda, \ell(\mu, \nu) | i, j \rangle.$$

□

### Bemerkungen

1. Das reduzierte Matrixelement hängt nicht von  $i, j$  oder  $\ell$  ab. Es scheint so, also ob es auch nicht von den Operatoren  $O$ , und den Darstellungen  $\mu$  und  $\nu$  abhängen würde, aber die  $w_{\alpha k}^\lambda$  hängen von  $O, \mu$  und  $\nu$  ab, denn

$$\text{span}(\{w_{\alpha k}^\lambda\}) = \text{span}(\{O_i^\mu e_j^\nu\})$$

2. In der Praxis sehr wichtig, da die vielen Matrixelemente (ME) links durch sehr wenige reduzierte ME rechts berechnet werden können. In letzteren stecken die physikalischen Details des Problems. Alles andere (CG-Koeffizienten) wird durch die Darstellungstheorie bestimmt, ist also durch die Symmetrien des Problems bereits festgelegt.
3. Bestimmung der reduzierten ME in der Praxis: Berechne so viele (geeignete) ME auf der linken Seite, wie es reduzierte ME gibt (oft nur eins!) und betrachte das Wigner-Eckart-Theorem als lineares Gleichungssystem für die reduzierten ME.

### Beispiel: Zeitabhängige Störungstheorie

- Betrachte ein Atom im Zustand  $\psi$  mit Energie  $E_\psi$  unter der (zeitabhängigen) Störung  $O$  (z.B. elektromagnetische Welle). Die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang in den Zustand  $\varphi$  (mit Energie  $E_\varphi$ ) ist proportional zu

$$|\langle \varphi | O | \psi \rangle|^2.$$

Dabei wird Strahlung der Frequenz  $|E_\psi - E_\varphi|/h$  absorbiert oder emittiert  $\rightsquigarrow$  experimentell beobachtbar: Intensität dieser Strahlung, proportional zu  $|\langle \varphi | O | \psi \rangle|^2$ .

- Ungestörtes Problem rotationsinvariant:  $\psi$  und  $\phi$  sind jeweils Teil einer Basis, die sich unter einer irreduziblen Darstellung von  $\text{SO}(3)$  transformiert:  $\Gamma^{2l+1}, \Gamma^{2l'+1}$ .



- Störung ebenfalls rotationsinvariant:  $O$  ist Element einer Menge irreduzibler Operatoren, transformiert sich z.B. unter  $\Gamma^3$  (Drehimpuls 1, Dipolstrahlung).
- Betrachte also  $\langle l', m' | O_{m''}^3 | l, m \rangle$  (weitere QZ nicht angegeben),  
 $m = -l, \dots, l$ ,  $m' = -l', \dots, l'$ ,  $m'' = -1, 0, 1$ .
- Es gilt (später):  $\Gamma^{3 \otimes (2l+1)} = \Gamma^{2l-1} \oplus \Gamma^{2l+1} \oplus \Gamma^{2l+3}$ , d.h. keine  $\alpha$ -Summe, nur ein reduziertes ME,

$$\langle l', m' | O_{m''}^3 | l, m \rangle = \langle l', m' (3, 2l+1) m'', m \rangle \langle l' || O^3 || l \rangle.$$

Für festes  $l, l'$  sind damit die relativen Intensitäten der  $(2l+1)(2l'+1)$  theoretisch möglichen Übergänge bereits durch die CG-Koeffizienten festgelegt (manche sind sogar Null  $\rightsquigarrow$  Auswahlregel).

(Problem hier etwas vereinfacht, vgl. Wu-Ki Tung, *Group Theory and Physics*, World Scientific, 1985, Abschnitte 4.3, 8.7 & 11.4.)

### 4.3 Linksideale und Idempotente

Mithilfe der verallgemeinerten Projektionsoperatoren können wir eine reduzible Darstellung in irreduzible Darstellungen zerlegen. Dazu muss man aber die irreduziblen Darstellungen bereits kennen. Bleibt die Frage: Wie kann man die irreduziblen Darstellungen konstruieren?

Reduziere die reguläre Darstellung (siehe Abschnitt 2.7), denn diese enthält alle irreduziblen Darstellungen  $\Gamma^\mu$  (mit Multiplizitäten  $d_\mu = \dim(\Gamma^\mu)$ ).

Zur Erinnerung:

- Darstellungsraum ist die Gruppenalgebra (oder Frobenius-Algebra)  
 $\mathcal{A}(G) = \text{span}(g_1, \dots, g_n)$ ,  $n = |G|$  (Gruppenelemente wieder durchnummeriert).
- $\mathcal{A}(G) \ni r = \sum_i r_i g_i$  analog  $q \in \mathcal{A}(G)$ :

$$rq = \sum_{i,j} r_i q_j g_i g_j = \sum_{i,j,k} r_i g_k (\Delta_i)_{kj} q_j.$$

**Definition:** (Linksideal)

Ein Unterraum  $L \subseteq \mathcal{A}(G)$ , der invariant unter Linksmultiplikation ist, heißt Linksideal, d.h.

$$qr \in L \quad \forall q \in \mathcal{A}(G) \text{ und } \forall r \in L.$$

Ein Linksideal  $L$  heißt *minimal*, wenn es kein nichttriviales Linksideal  $K \subset L$  enthält.

**Bemerkungen:**

1. Analog definiert man Rechtsideale und beidseitige Ideale (benötigen wir hier aber nicht).

2.  $L$  ist Linksideal  $\Leftrightarrow L$  ist invarianter Unterraum, denn

“ $\Rightarrow$ ” klar, denn  $G \subset \mathcal{A}(G)$

“ $\Leftarrow$ ” mit  $r \in L$  und  $q = \sum_j q_j g_j \in \mathcal{A}(G)$  gilt

$$qr = \sum_j q_j \underbrace{g_j r}_{\in L \text{ (da inv. Unterraum)}} \in L \text{ (da Linearkombination von Elementen aus } L\text{)}.$$

3. Ebenso:  $L$  ist minimales Linksideal  $\Leftrightarrow L$  irreduzibler Unterraum

**Idee:** Finde die minimalen Linksideale und konstruiere daraus die irreduziblen Darstellungen (durch Anwendung der Gruppenelemente auf die Basisvektoren der Linksideale).

Bezeichne in Folgenden den Projektionsoperator auf das minimale Linksideal  $L_\alpha^\mu$  mit  $P_\alpha^\mu$ , d.h.  $P_\alpha^\mu \mathcal{A}(G) = L_\alpha^\mu$ . (Wie immer nummeriert  $\mu$  die nicht äquivalenten Darstellungen, und  $\alpha = 1, \dots, d_\mu$ .)

**Eigenschaften von  $P_\alpha^\mu$ :**

(i)  $P_\alpha^\mu r \in L_\alpha^\mu \forall r \in \mathcal{A}(G)$

(ii) wenn  $q \in L_\alpha^\mu$ , dann  $P_\alpha^\mu q = q$

(iii)  $P_\alpha^\mu P_\beta^\nu = \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} P_\alpha^\mu$  ,

und es folgt

(iv)  $P_\alpha^\mu q = q P_\alpha^\mu \forall q \in \mathcal{A}(G)$

**Beweis:** Sei  $r \in \mathcal{A}(G)$  beliebig. Zerlege als  $r = \sum_{\nu,\beta} r_\beta^\nu$  mit  $r_\beta^\nu \in L_\beta^\nu$ , dann gilt:

$$q P_\alpha^\mu r = q P_\alpha^\mu \sum_{\nu,\beta} r_\beta^\nu = q r_\alpha^\mu \quad \text{und}$$

$$P_\alpha^\mu q r = P_\alpha^\mu q \sum_{\nu,\beta} r_\beta^\nu = P_\alpha^\mu \sum_{\nu,\beta} \underbrace{q r_\beta^\nu}_{\in L_\beta^\nu} = q r_\alpha^\mu. \quad \square$$

Definiere weiter  $L^\mu := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} L_\alpha^\mu$  und konstruiere zunächst den Projektionsoperator  $P^\mu$  auf  $L^\mu$ :

Für jedes  $q \in \mathcal{A}(G)$  existiert eine eindeutige Zerlegung

$$q = \sum_\mu q_\mu \quad \text{mit} \quad q_\mu \in L^\mu,$$

insbesondere für die Identität,

$$I = \sum_\mu e_\mu, \quad e_\mu \in L^\mu.$$

Damit gilt,

$$q = qI = q \sum_\mu e_\mu = \sum_\mu \underbrace{q e_\mu}_{\in L^\mu \text{ (da } e_\mu \in L^\mu)},$$

d.h.  $q_\mu = q e_\mu$ , und wir erhalten:

**Lemma 11.**

$P^\mu$  ist gegeben durch die Rechtsmultiplikation mit  $e_\mu$ , d.h.  $P^\mu q = qe_\mu \forall q \in \mathcal{A}(G)$ .

**Bemerkungen:**

1.  $P^\mu$  ist offensichtlich ein linearer Operator.
2. Aus

$$\underbrace{e_\mu}_{\in L^\mu} = e_\mu I = e_\mu \sum_{\nu} e_\nu = \sum_{\nu} \underbrace{e_\mu e_\nu}_{\in L^\nu}$$

folgt  $e_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu} e_\mu$  – vgl. Eigenschaft (iii).

3. Mit  $I = \sum_{\mu, \alpha} e_\alpha^\mu$  funktioniert diese Herleitung ebenso Projektoren auf minimale Links-ideale, definiert durch

$$P_\alpha^\mu q := qe_\alpha^\mu.$$

**Definition:** (Idempotente)

Elemente  $e_\mu$  der Gruppenalgebra  $\mathcal{A}(G)$ , für die

$$e_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu} e_\mu$$

gilt, heißen Idempotente. Tritt rechts noch ein Faktor  $\neq 1$  auf, so heißen sie wesentlich idempotent.

**Bemerkungen:**

1. Man sagt auch das Idempotent  $e_\mu$  erzeugt das Linksideal  $L^\mu$ , d.h.

$$L^\mu = \{qe_\mu : q \in \mathcal{A}(G)\}.$$

2. Ein Idempotent heißt *primitiv*, wenn es ein minimales Linksideal erzeugt. Ansonsten kann es als Summe  $e_1 + e_2$  zweier Idempotenten  $0 \neq e_1 \neq e_2 \neq 0$  geschrieben werden.

**Satz 12.**

Ein Idempotent  $e$  ist primitiv  $\Leftrightarrow$  Für jedes  $q \in \mathcal{A}(G) \exists \lambda_q \in \mathbb{C}: eqe = \lambda_q e$ .

**Beweis:**

“ $\Rightarrow$ ”: Sei  $L$  das von  $e$  erzeugte Linksideal.

Zu  $q \in \mathcal{A}(G)$  definiere die lineare Abbildung  $Q : \mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{A}(G)$  durch

$$Qr = reqe \quad \text{für } r \in \mathcal{A}(G).$$

Dann gilt  $Qsr = sreqe = sQr \forall s, r \in \mathcal{A}(G)$ , und insbesondere  $\forall r \in L$  und  $\forall s \in G$ , d.h.  $Q$  vertauscht mit der Darstellung von  $G$  auf  $L$ .

Ist  $e$  primitiv, so ist  $L$  minimal und nach dem 1. Schur'schen Lemma (Satz 4) ist  $Q$  ein Vielfaches der Identität auf  $L$ . Diese ist aber durch Rechtsmultiplikation mit  $e$  gegeben, d.h.  $\exists \lambda_q \in \mathbb{C}: eqe = \lambda_q e$ .

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $e = e_1 + e_2$  mit Idempotenten  $0 \neq e_1 \neq e_2 \neq 0$ . Dann gilt einerseits

$$ee_1e = (e_1 + e_2)e_1(e_1 + e_2) = e_1,$$

und andererseits  $\exists \lambda$ :

$$ee_1e = \lambda e$$

Das heißt

$$\lambda e = e_1 = e_1^2 = \lambda^2 e^2 = \lambda^2 e \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = \lambda,$$

aber  $\lambda = 0 \nmid$  zu  $e_1 \neq 0$  und  $\lambda = 1 \Rightarrow e = e_1 \Rightarrow e_2 = 0 \nmid$  zu  $e_2 \neq 0$ . □

**Satz 13.**

Die von zwei primitiven Idempotenten  $e_1$  und  $e_2$  erzeugten Linksideale  $L_1$  und  $L_2$  tragen äquivalente irreduzible Darstellungen  $\Gamma^1$  und  $\Gamma^2$  genau dann, wenn  $e_1 q e_2 \neq 0$  für mindestens ein  $q \in \mathcal{A}(G)$ .

**Beweis:**

“ $\Leftarrow$ ”: Sei  $e_1 q e_2 = s \neq 0$  für ein  $q \in \mathcal{A}(G)$

Definiere die lineare Abbildung  $S : \mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{A}(G)$  durch  $Sr = rs$ .

Offensichtlich gilt  $S : L_1 \rightarrow L_2$ , und da  $Se_1 = s \neq 0$  ist  $S|_{L_1} \neq 0$ .

Wieder folgt  $Srp = rps = rSp \forall r, p \in \mathcal{A}(G)$ , also insbesondere  $\forall r \in G$  und  $\forall p \in L_1$ , d.h.  $S\Gamma^1(r) = \Gamma^2(r)S$ , und nach dem 2. Schur'schen Lemma sind  $\Gamma^1$  und  $\Gamma^2$  äquivalent.

“ $\Rightarrow$ ”: Sind  $\Gamma^1$  und  $\Gamma^2$  äquivalent, so existiert eine lineare Abbildung  $S : L_1 \rightarrow L_2$  mit  $S\Gamma^1(r) = \Gamma^2(r)S \forall r \in G$ , bzw.  $Srp = rSp \forall r \in G$  und  $\forall p \in L_1$ , und durch Linearität auch  $\forall r \in \mathcal{A}(G)$ .

Definiere  $s := Se_1 \in L_2 \Rightarrow s = se_2$ .

Andererseits gilt  $s = Se_1 = Se_1e_1 = e_1Se_1 = e_1s = e_1se_2$ . □

**Bemerkung:**

Das primitive Idempotent

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{|G|} g_i$$

erzeugt das eindimensionale Linksideal  $L^1$ , dessen Elemente invariant unter der Gruppe sind, d.h.  $L^1$  trägt die triviale Darstellung.

**Beweis:**  $L^1 = \{re_1 : r \in \mathcal{A}(G)\}$  mit

$$\begin{aligned} re_1 &= \left( \sum_j r_j g_j \right) \left( \frac{1}{|G|} \sum_i g_i \right) = \sum_j r_j \frac{1}{|G|} \sum_i g_j g_i \\ &= \sum_j r_j \frac{1}{|G|} \sum_k g_k \quad (\text{Umordnungstheorem}) \\ &= ce_1 \quad \text{mit} \quad c = \sum_j r_j, \end{aligned}$$

d.h.  $L^1 = \text{span}(e_1)$ ,  $\dim L^1 = 1$ , und damit minimal. Weiter gilt

$$g \cdot c e_1 = \frac{c}{|G|} \sum_i g g_i = \frac{c}{n} \sum_k g_k = c e_1$$

d.h.  $L^1$  trägt die triviale Darstellung. □

### Zusammenfassung:

- Die Gruppenalgebra  $\mathcal{A}(G)$  kann in Linksideale  $L^\mu$  zerlegt werden ( $\mu$  entspricht den nichtäquivalenten irreduziblen Darstellungen der Gruppe).
- Die  $L^\mu$  werden durch Rechtsmultiplikation mit den Idempotenten  $e_\mu$  erzeugt, wobei

$$e_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu} e_\mu \quad \text{und} \quad \sum_\mu e_\mu = e.$$

- Jedes  $L^\mu$  kann in  $d_\mu$  minimale Linksideale  $L_\alpha^\mu$  (mit  $\alpha = 1, \dots, n_\mu$ ) zerlegt werden.
- Sie  $L_\alpha^\mu$  werden durch Rechtsmultiplikation mit den primitiven Idempotenten  $e_\alpha^\mu$  erzeugt.
- Wenn man alle primitiven Idempotenten gefunden hat, kann man daraus leicht alle irred. Darstellungen einer Gruppe konstruieren.
- Übungen: Reduzierung der regulären Darstellung von  $C_3$ .
- Im nächsten Kapitel benutzen wir diese Techniken, um alle irreduziblen Darstellungen von  $S_n$  zu finden.

### 4.3.1 Dimensionen und Charaktere der irreduziblen Darstellungen

**Satz 14.** Sei  $G$  eine Gruppe mit Gruppenalgebra  $\mathcal{A}(G)$ , und sei

$$e_\mu = \sum_{g \in G} a_g g \quad \left( a_g \in \mathbb{C}, \begin{array}{l} \text{Linearkombination} \\ \text{der Gruppenelemente} \end{array} \right)$$

ein primitives Idempotent mit zugehörigem minimalem Linksideal  $L^\mu = \mathcal{A}(G)e_\mu$ , das die irreduzible Darstellung  $\Gamma^\mu$  trägt ( $\dim \Gamma^\mu = d_\mu$ ). Dann gilt für  $h \in G$

$$\chi^\mu(h) = \text{tr } \Gamma^\mu(h) = \frac{|G|}{n_c} \sum_{g \in c} a_g^*$$

Dabei ist  $c$  die Konjugationsklasse von  $h$  mit  $n_c$  Elementen.

**Bemerkung:**  $d_\mu = \chi^\mu(I) = |G| a_I^*$ .

**Beweis:**

Definiere die lineare Abbildung

$$A_h : \mathcal{A}(G) \ni r \mapsto h^{-1} r e_\mu.$$

(i) Die Spur von  $A_h$  ist der Charakter von  $h^{-1}$ :

Wähle eine Basis  $\{r_1, \dots, r_{|G|}\}$  von  $\mathcal{A}$  wobei  $\{r_1, \dots, r_{d_\mu}\}$  eine Basis von  $L^\mu$  sei. Dann enthält

$$A_h r_j = h^{-1} r_j e_\mu$$

keine Anteile proportional zu  $r_k$  mit  $k \geq d_\mu$ , d.h. jetzt  $j \leq d_\mu$ ,

$$A_h r_j = h^{-1} r_j e_\mu = h^{-1} r_j = \sum_{k=1}^{d_\mu} r_k \Gamma^\mu(h^{-1})_{kj}$$

und damit

$$\text{tr } A_h = \chi^\mu(h^{-1}) = \chi(h)^*$$

(wähle o.B.d.A.  $\Gamma^\mu$  unitär, alle anderen äquivalent).

(ii) Wähle nun die Gruppenelemente  $g \in G$  als Basis für  $\mathcal{A}(G)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} A_h g &= h^{-1} g e_\mu = \sum_{g' \in G} a_{g'} \underbrace{h^{-1} g g'}_{\stackrel{?}{=} g \Leftrightarrow g' = g^{-1} h g} \\ &= a_{g^{-1} h g} g + \text{Terme nicht proportional zu } g, \end{aligned}$$

und damit

$$\text{tr } A_h = \sum_{g \in G} a_{g^{-1} h g} = \sum_{g' \in c} a_{g'} |G_{g'}| = \frac{|G|}{n_c} \sum_{g' \in c} a_{g'},$$

wobei  $G_{g'}$  die Standgruppe von  $g'$  ist und laut Bahnformel (ÜA 6) gilt  $n_c \cdot |G_{g'}| = |G|$ .

Aus (i) und (ii) folgt die Behauptung. □

## 5 Darstellungen der symmetrischen Gruppe und Young-Diagramme

Die Darstellungstheorie von  $S_n$  ist die Grundlage für die Analyse vieler anderer Gruppen:

- Endliche Gruppen der Ordnung  $n$  sind isomorph zu Untergruppen von  $S_n$  (Satz 1).
- Die primitiven Idempotente von  $S_n$  werden zur Konstruktion der irreduziblen Darstellungen der klassischen Lie-Gruppen, wie z.B.  $U(m)$ ,  $O(m)$  oder  $SU(m)$ , benutzt.
- Betrachtet man Systeme identischer Teilchen, so ist  $S_n$  immer ein Faktor der Symmetriegruppe des Hamiltonoperators  $H$ , d.h. die Eigenzustände von  $H$  transformieren sich in irreduziblen Darstellungen von  $S_n$ .

### 5.1 Eindimensionale und assoziierte Darstellungen von $S_n$

Die *alternierende Gruppe*  $A_n$  ist Gruppe der geraden Permutationen von  $n$  Objekten (d.h. Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen).  $A_n$  ist eine invariante Untergruppe von  $S_n$ , mit Faktorgruppe  $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ .

$\Rightarrow S_n$  hat zwei eindimensionale Darstellungen, die von den Darstellungen von  $\mathbb{Z}_2$  induziert werden (vgl. ÜA 9 & 17):

$$\begin{aligned} \Gamma^s(p) &= 1 \quad \forall p \in S_n \text{ (triviale Darstellung) und} \\ \Gamma^a(p) &= \text{sgn}(p) := \begin{cases} 1 & \text{für gerade } p \\ -1 & \text{für ungerade } p \end{cases} \end{aligned}$$

$\text{sgn}(p)$  heißt Vorzeichen oder Parität der Permutation  $p$ .

**Später:** Weitere eindimensionale Darstellungen gibt es nicht (siehe Abschnitt 5.5)

Alternative Herleitung von  $\Gamma^s$  und  $\Gamma^a$  durch:

**Lemma 15.** *Der Symmetrisierer  $s = \sum_p p$  und der Antisymmetrisierer  $a = \sum_p \text{sgn}(p)p$  von  $S_n$  sind wesentlich idempotent und primitiv.*

**Beweis:** Übungen.

**Bemerkungen:**

1. Für alle  $p \in S_n$  gilt

$$\begin{aligned} spa &= sa = \sum_{q,r} \text{sgn}(r)qr = \sum_q \text{sgn}(q) \underbrace{\sum_r \text{sgn}(qr)qr}_r = a \sum_q \text{sgn}(q) = 0. \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Umordnungssatz: } sp = s \end{aligned}$$

$\Rightarrow s$  und  $a$  erzeugen nichtäquivalente irreduzible Darstellungen von  $S_n$  mit Basisvektoren  $\{ps\}$  und  $\{pa\}$  ( $p \in S_n$ ).

2. Für alle  $q \in S_n$  gilt:

$$qps = s = ps \quad \text{und}$$

$$qpa = \sum_r \text{sgn}(r)qpr = \text{sgn}(qp) \underbrace{\sum_r \text{sgn}(qpr)qpr}_{=a} = \text{sgn}(q) \text{sgn}(p)a = \text{sgn}(q)pa, .$$

$\Rightarrow$  Beide Darstellungen sind eindimensional, mit Matrixelementen 1 bzw.  $\text{sgn}(p)$ .

**Definition:** (Assoziierte Darstellungen)

Ist  $\Gamma^\lambda$  eine Darstellung von  $S_n$  mit Dimension  $d_\lambda$ , so heißen  $\Gamma^\lambda$  und  $\overline{\Gamma^\lambda} := \Gamma^\lambda \otimes \Gamma^a$  zueinander *assoziierte* Darstellungen.

**Bemerkungen:**

1.  $\dim(\overline{\Gamma^\lambda}) = d_\lambda$
2.  $\overline{\Gamma^\lambda}$  ist irreduzibel  $\Leftrightarrow \Gamma^\lambda$  ist irreduzibel, denn

$$\overline{\Gamma^\lambda}(p) = \text{sgn}(p)\Gamma^\lambda(p) \quad \Rightarrow \quad \sum_p |\overline{\chi^\lambda}(p)|^2 = \sum_p |\chi^\lambda(p)|^2$$

(=  $n!$  falls irreduzibel).

3. Falls  $\chi^\lambda(p) = 0$  für alle ungeraden  $p$ , so sind  $\Gamma^\lambda$  und  $\overline{\Gamma^\lambda}$  äquivalent (denn dann sind alle Charaktere gleich, vgl. Abschnitt 2.6), und  $\Gamma^\lambda$  heißt *selbst-assoziiert*. Ansonsten sind sie nichtäquivalent.
4.  $\Gamma^s$  und  $\Gamma^a$  sind zueinander assoziiert.

Der folgende Satz ist für Anwendungen auf Systeme von Bosonen und Fermionen wichtig.

**Satz 16.** *Seien  $\Gamma^\lambda$  und  $\Gamma^\mu$  irreduzible Darstellungen von  $S_n$ . Dann gilt*

- (i)  $\Gamma^\lambda \otimes \Gamma^\mu$  enthält  $\Gamma^s$  genau einmal (gar nicht), falls  $\Gamma^\lambda$  und  $\Gamma^\mu$  äquivalent (nichtäquivalent) sind.
- (ii)  $\Gamma^\lambda \otimes \Gamma^\mu$  enthält  $\Gamma^a$  genau einmal (gar nicht), falls  $\Gamma^\lambda$  und  $\Gamma^\mu$  assoziiert (nicht assoziiert) sind.

**Beweis:**

Zunächst: Wir betrachten nur unitäre Darstellungen von  $S_n$

(alle anderen sind äquivalent, vgl. Satz 3)

$\Rightarrow$  Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen sind reell, denn

$$p^{-1} \text{ ist in derselben Konjugationsklasse wie } p \Rightarrow \chi(p) = \chi(p^{-1}) = \chi^*(p)$$

$\uparrow$   
Darst. ist unitär



(i)  $\Gamma^s$  sei in  $\Gamma^{\lambda \otimes \mu}$   $a_s$  mal enthalten

$$a_s = \frac{1}{n!} \sum_p \underbrace{\chi^s(p)^*}_{=1} \chi^{\lambda \otimes \mu}(p) = \frac{1}{n!} \sum_p \underbrace{\chi^\lambda(p)}_{=\chi^\lambda(p)^*} \chi^\mu(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \Gamma^\lambda \text{ und } \Gamma^\mu \text{ äquivalent} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii)  $\Gamma^a$  sei in  $\Gamma^{\lambda \otimes \mu}$   $a_a$  mal enthalten

$$\begin{aligned} a_a &= \frac{1}{n!} \sum_p \underbrace{\chi^a(p)^*}_{=\text{sgn}(p)} \chi^{\lambda \otimes \mu}(p) = \frac{1}{n!} \sum_p \underbrace{\text{sgn}(p) \chi^\lambda(p)}_{=\overline{\chi^\lambda(p)} = \overline{\chi^\lambda(p)^*}} \chi^\mu(p) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{\Gamma^\lambda} \text{ und } \Gamma^\mu \text{ äquivalent, d.h. falls } \Gamma^\lambda \text{ und } \Gamma^\mu \text{ assoziiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

□

## 5.2 Young-Diagramme & Young-Tableaux

**Definition:** (Zerlegung)

Eine Zerlegung  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  einer natürlichen Zahl  $n$  ist eine Folge positiver ganzer Zahlen, für die gilt

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i = n \quad \text{mit} \quad \lambda_i \geq \lambda_{i+1}.$$

(i) Wir sagen zwei Zerlegungen  $\lambda$  und  $\mu$  sind gleich, wenn  $\lambda_i = \mu_i$  für alle  $i$ .

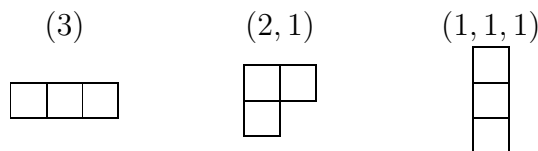
(ii) Wir sagen  $\lambda > \mu$  ( $\lambda < \mu$ ), wenn die erste nichtverschwindende Zahl in der Folge  $\lambda_i - \mu_i$  positiv (negativ) ist.

Eine Zerlegung wird graphisch durch ein sogenanntes *Young-Diagramm* dargestellt:

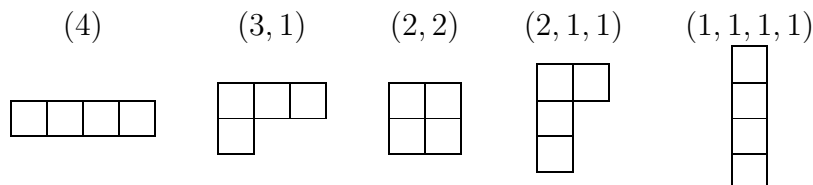
- $n$  Felder, angeordnet in  $r$  Zeilen,
- dabei enthält die  $i$ -te Zeile  $\lambda_i$  Felder.

**Beispiele:**

1. Für  $n = 3$  gibt es 3 verschiedene Zerlegungen:



2. Für  $n = 4$  gibt es 5 verschiedene Zerlegungen:



Jede Zerlegung von  $n$  entspricht einer Konjugationsklasse von  $S_n$  und umgekehrt:

- Jede Klasse entspricht einer bestimmten Zykelstruktur (vgl. ÜA 25).
- Die  $i$ -te Zeile des Diagramms interpretieren wir als  $\lambda_i$ -Zykel.
- Jede der Zahlen  $1, 2, \dots, n$  kommt in genau einem der Zykel vor:  $\sum_i \lambda_i = n$ .

$\Rightarrow$  Die Anzahl der Young-Diagramme für  $n$  ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von  $S_n$ , und damit gleich der Anzahl der nichtäquivalenten irreduziblen Darstellungen von  $S_n$ .

**Beispiel:** Für  $S_3$  ist

$$\begin{aligned} \{I\} &: 3 \text{ 1-Zykel, d.h. } (1, 1, 1) \\ \{(12), (13), (23)\} &: 1 \text{ 2-Zykel, 1 1-Zykel, d.h. } (2, 1) \\ \{(123), (132)\} &: 1 \text{ 3-Zykel, d.h. } (3) \end{aligned}$$

**Weitere Definitionen:**

- Ein *Young-Tableau* ist ein Young-Diagramm, in dem in jedem der  $n$  Felder genau eine der Zahlen  $1, \dots, n$  steht.

**Beispiele:**

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

- In einem *normalen Young-Tableau* stehen die Zahlen  $1, \dots, n$  in aufsteigender Reihenfolge, erst von links nach rechts, dann von oben nach unten.

**Beispiele:**

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Für jedes Young-Diagramm gibt es genau ein normales Young-Tableau.

- In einem *Standard-Young-Tableau* stehen die Zahlen aufsteigend (aber nicht unbedingt in Reihenfolge) in den Zeilen und Spalten.

**Beispiele:**

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

- Das normale Young-Tableau zur Zerlegung  $\lambda$  bezeichnen wir mit  $\Theta_\lambda$ .
- Ein beliebiges Tableau erhält man aus  $\Theta_\lambda$  durch eine Permutation  $p$  der  $n$  Zahlen in den Feldern:

$$\Theta_\lambda^p = p\Theta_\lambda.$$

Damit gilt  $q\Theta_\lambda^p = \Theta_\lambda^{qp}$ .

**Bemerkung:** Die Bezeichnungen sind in der Literatur uneinheitlich, z.B. Young Diagramm, Young-Graph, Young-Tableau, Young-Schema oder Young-Rahmen.

### 5.3 Symmetrisierer und Antisymmetrisierer von Young-Tableaux

Wir werden sehen, dass man für jedes Young-Tableau ein primitives Idempotent definieren kann, das ein minimales Linksideal in  $\mathcal{A}(S_n)$  und damit eine irreduzible Darstellung von  $S_n$  erzeugt.

**Definitionen:** Sei  $\Theta_\lambda^p$  ein Young-Tableau.

Eine *horizontale* Permutation  $h_\lambda^p$  permutiert nur Zahlen in den Zeilen von  $\Theta_\lambda^p$ .

Eine *vertikale* Permutation  $v_\lambda^p$  permutiert nur Zahlen in den Spalten von  $\Theta_\lambda^p$ .

Weiter definieren wir

$$\text{den Symmetrisierer} \quad s_\lambda^p = \sum_{\{h_\lambda^p\}} h_\lambda^p,$$

$$\text{den Antisymmetrisierer} \quad a_\lambda^p = \sum_{\{v_\lambda^p\}} \text{sgn}(v_\lambda^p) v_\lambda^p \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \text{den Young-Operator} \\ \text{(oder irreduziblen Symmetrisierer)} \quad e_\lambda^p = s_\lambda^p a_\lambda^p = \sum_{\{h_\lambda^p\}} \sum_{\{v_\lambda^p\}} \text{sgn}(v_\lambda^p) h_\lambda^p v_\lambda^p. \end{aligned}$$

(Manche Bücher definieren  $e = as$  statt  $e = sa$ . Das ist zwar Konventionssache, liefert aber in Rechnungen andere Zwischenergebnisse!)

**Beispiel:** Standard-Tableaux von  $S_3$

- $\Theta_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$  : Alle  $p$  sind  $h$  :  $s_1 = \sum_p p = s$  (Symmetrisierer von  $S_3$ )  
Nur  $I$  ist ein  $v$  :  $a_1 = I$   
 $e_1 = sI = s$
- $\Theta_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$  : Die  $h$  sind  $I$  und  $(12)$  :  $s_2 = I + (12)$   
Die  $v$  sind  $I$  und  $(13)$  :  $a_2 = I - (13)$   
 $e_2 = s_2 a_2 = I + (12) - (13) - (132)$
- $\Theta_3 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$  : nur  $I$  ist ein  $h$  :  $s_3 = I$   
Alle  $p$  sind  $v$  :  $a_3 = \sum_p \text{sgn}(p)p = a$  (Antisymmetrisierer von  $S_3$ )  
 $e_3 = Ia = a$
- $\Theta_2^{(23)} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$  : Die  $h$  sind  $I$  und  $(13)$  :  $s_2^{(23)} = I + (13)$   
Die  $v$  sind  $I$  und  $(12)$  :  $a_2^{(23)} = I - (12)$   
 $e_2^{(23)} = s_2^{(23)} a_2^{(23)} = I - (12) + (13) - (123)$

**Beobachtungen:** Dieses Beispiel enthält bereits die meisten wichtigen Aspekte.  
( $p$  wird im folgenden weggelassen, um die Notation zu vereinfachen)

1. Für jedes Tableau  $\Theta_\lambda$  bilden die horizontalen und vertikalen Permutationen jeweils eine Untergruppe von  $S_n$ .

2.  $s_\lambda$  und  $a_\lambda$  sind (totale) Symmetrisierer und Antisymmetrisierer der jeweiligen Untergruppe, denn

$$s_\lambda h_\lambda = h_\lambda s_\lambda = s_\lambda \quad \text{und} \quad a_\lambda v_\lambda = v_\lambda a_\lambda = \text{sgn}(v_\lambda) a_\lambda$$

3.  $s_\lambda$  und  $a_\lambda$  sind wesentlich idempotent, aber i.A. nicht primitiv.  
Die  $e_\lambda$  sind primitive Idempotente (Übungen).

4.  $e_1 = s$  und  $e_3 = a$  erzeugen die beiden eindimensionalen irreduziblen Darstellungen von  $S_3$  (vgl. Abschnitt 5.1)  
 $e_2$  erzeugt ein zweidimensionales Linksideal  $L_2$  von  $\mathcal{A}(S_3)$  (durch Rechtsmultiplikation),

$$\begin{aligned} Ie_2 &= e_2, \\ (12)e_2 &= (12) + I - (132) - (13) = e_2, \\ (23)e_2 &= (23) + (132) - (123) - (12) =: r_2, \\ (13)e_2 &= (13) + (123) - I - (23) = -e_2 - r_2, \\ (123)e_2 &= (123) + (13) - (23) - I = -e_2 - r_2, \\ (132)e_2 &= (132) + (23) - (12) - (123) = r_2, \end{aligned}$$

d.h.  $L_2 = \text{span}(e_2, r_2)$ . Da  $e_2$  primitiv ist, ist  $L_2$  minimal.

⇒ Die Young-Operatoren der normalen Young-Tableaux erzeugen alle irreduziblen Darstellungen von  $S_3$ .

5.  $e_2^{(23)}$  erzeugt auch eine irreduzible Darstellung. Diese muss zu der von  $e_2$  erzeugten Darstellung äquivalent sein, da es nur eine zweidimensionale irreduzible Darstellung gibt.

Das von  $e_2^{(23)}$  erzeugte minimale Linksideal ist  $L_2^{(23)} = \text{span}(e_2^{(23)}, r_2^{(23)})$  mit

$$r_2^{(23)} = (123) - (13) + (23) - (132).$$

Dieses ist orthogonal zu den anderen Linksidealen  $L_1 = \text{span}(e_1)$ ,  $L_3 = \text{span}(e_3)$  und  $L_2$

6.  $\mathcal{A}(S_3)$  ist die direkte Summe der vier minimalen Linksideale.  
Die Identität hat die Zerlegung

$$I = \frac{1}{6}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_2^{(23)} + \frac{1}{6}e_3$$

d.h., reguläre Darstellung von  $S_3$  wird vollständig reduziert durch die Young-Operatoren der Standard-Young-Tableaux.

## 5.4 Irreduzible Darstellungen von $S_n$

Die Beobachtungen, die wir in Abschnitt 5.3 über  $S_3$  gemacht haben gelten allgemein für  $S_n$ . (Beweise z.T. in den Übungen, z.T. ausgelassen – manche Verallgemeinerungen sind offensichtlich, da sich das jeweilige  $S_3$ -Argument direkt überträgt, andere erfordern etwas Rechnerei, siehe z.B. Tung Kap. 5.4 & Appendix III oder Schensted Abschnitt 3.4)

**Satz 17.**

1. Für die Symmetrisierer eines Young-Tableaus  $\Theta_\lambda$  gilt

$$\begin{aligned} s_\lambda r a_\lambda &= \xi e_\lambda \quad \text{für alle } r \in \mathcal{A}(S_n) \\ e_\lambda^2 &= \eta e_\lambda \end{aligned}$$

mit zwei Zahlen  $\xi, \eta$  und  $\eta \neq 0 \Rightarrow \frac{e_\lambda}{\eta}$  ist ein primitives Idempotent.

2. Der Young-Operator  $e_\lambda$  erzeugt daher eine irreduzible Darstellung von  $S_n$  auf  $\mathcal{A}(S_n)$ .
3. Die von  $e_\lambda$  und  $e_\lambda^p$  (mit  $p \in S_n$ ) erzeugten irreduziblen Darstellungen sind äquivalent.
4. Zwei Young-Operatoren  $e_\lambda$  und  $e_\mu$  erzeugen nichtäquivalente irreduzible Darstellungen, wenn die entsprechenden Young-Diagramme verschieden sind (d.h.  $\lambda \neq \mu$  als Zerlegungen).
5. Die Young-Operatoren der normalen Young-Tableaux erzeugen alle nichtäquivalenten irreduziblen Darstellungen von  $S_n$ . (D.h. wir können die verschiedenen irreduziblen Darstellungen mit den verschiedenen Young-Diagrammen identifizieren.)
6. (i) Die minimalen Linksideale, die von den Young-Operatoren der Standard-Tableaux erzeugt werden, sind linear unabhängig.  
(ii) Die direkte Summe dieser Linksideale ergibt den Raum  $\mathcal{A}(S_n)$ .

## 5.5 Berechnung von Charakteren mithilfe der Young-Diagramme

Die Charaktere der irreduziblen Darstellungen von  $S_n$  (und mit  $d_\mu = \chi^\mu(I)$  auch deren Dimensionen) können mit den Methoden aus Abschnitt 4.3.1 bestimmt werden. Dies kann aber schnell aufwändig werden.

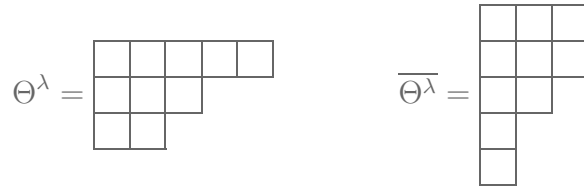
Basis für die folgenden effizienteren Methoden ist die *Frobenius-Charakter-Formel* (oder Frobenius-Weyl-Charakter-Formel) welche die Charaktere von Darstellungen von  $S_n$  auf Charaktere von  $S_m$  mit  $m < n$  zurückführt.

Hier zunächst ohne Beweis. Eventuell können wir nach der Diskussion der Charaktere der klassischen Lie-Gruppen noch den Weyl'schen Beweis studieren.

- Die Dimension der irreduziblen Darstellung  $\Gamma^\lambda$ , die dem Young-Diagramm  $\Theta_\lambda$  entspricht, ist gleich der Anzahl der möglichen Standard-Tableaux' von  $\Theta_\lambda$ . (Denn das



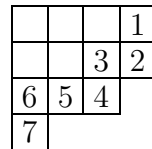
- Die zu einer irreduziblen Darstellung  $\Gamma^\lambda$  assoziierte Darstellung  $\overline{\Gamma^\lambda}$  erhält man, indem man  $\Theta_\lambda$  transponiert, d.h. Zeilen und Spalten vertauscht:



- **Rekursive Berechnung der Charaktere** der irreduziblen Darstellungen von  $S_n$ :

- *Rand* eines Young-Diagramms := rechter und unterer Rand, d.h. die Gesamtheit der Felder, deren rechte Seite oder untere Seite oder rechte untere Ecke zum Rand des Diagramms gehört.

**Beispiel:**



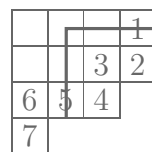
- *Reguläres Randstück* := Aufeinanderfolgende Randfelder, bei deren Wegnahme ein Young-Diagramm zurückbleibt.

**In obigem Beispiel:** 1-2, 1-4, 1-5, 1-7, 2, 2-4, 2-5, 2-7, 4, 4-5, 4-7, 7

⇒ Alle Zeilenenden sind Beginn von regulären Randstücken,  
alle Spaltenenden sind Ende von regulären Randstücken.

- Jeder Haken entspricht einem regulären Randstück und umgekehrt. Die Hakenlänge ist dabei gleich der Länge des Randstückes.

**Beispiel:** Das reguläre Randstück 1-5 entspricht dem folgenden Haken:



- Ein reguläres Randstück heißt *positiv (negativ)*, wenn die Anzahl der Vertikal-schritte (= Anzahl der Zeilen  $-1$ ) gerade (ungerade) ist.

- Sei  $c$  eine Konjugationsklasse von  $S_n$  mit Zykelstruktur  $c = (a_1, a_2, \dots, a_q)$   
Gesucht: Charakter  $\chi_c^\lambda$  dieser Klasse in der irreduziblen Darstellung  $\Gamma^\lambda$ .

\* Wähle einen beliebigen Zykel von  $c$  mit Länge  $a_i$ .

\* Bezeichne mit  $\bar{c}$  die Klasse von  $S_{n-a_i}$ , die man durch Wegnahme des Zyklus  $a_i$  von  $c$  erhält.

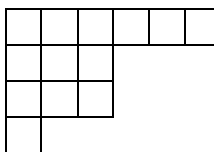
- \* Starte mit dem Young-Diagramm  $\Theta_\lambda$  von  $\Gamma^\lambda$ , bestimme alle regulären Randstücke der Länge  $a_i$  und bezeichne das Young-Diagramm von  $S_{n-a_i}$ , das nach Wegnahme eines solchen Randstückes übrigbleibt, mit  $\Theta_{\bar{\lambda}}$ , dann gilt

$$\chi_c^\lambda = \sum_{\bar{\lambda}} \pm \chi_{\bar{c}}^{\bar{\lambda}}$$

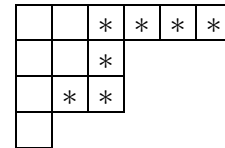
- + für positive Randstücke
- - für negative Randstücke
- Setze rekursiv fort, d.h. benutze denselben Algorithmus, um die  $\chi_{\bar{c}}^{\bar{\lambda}}$  zu bestimmen.
- Falls gar nichts übrigbleibt, ist  $\chi_{(\ )}^{\bar{\lambda}=0} = 1$ .  
(Vorzeichen des zuletzt Weggenommenen Randstückes nicht vergessen!)
- \* Falls es kein reguläres Randstück der Länge  $a_i$  gibt, ist  $\chi_c^\lambda = 0$ .

Damit diese Methode effizient ist, sollte man  $a_i$  so wählen, dass möglichst wenig reguläre Randstücke der Länge  $a_i$  vorkommen.

**Beispiele:**

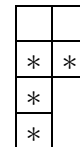
1.  $S_{13}$ ,  $c = (7, 4, 2)$ ,  $\Gamma^\lambda = (6, 3, 3, 1) =$  

- Es gibt nur einen Haken mit Länge 7, dieser entspricht dem positiven Randstück:



$$\Rightarrow \chi_{(7,4,2)}^{(6,3,3,1)} = +\chi_{(4,2)}^{(2,2,1,1)}$$

- Nun gibt es nur einen Haken mit Länge 4, dieser entspricht dem positiven Randstück:



$$\Rightarrow \chi_{(7,4,2)}^{(6,3,3,1)} = +\chi_{(2)}^{(2)} = 1 \quad (\text{triviale Darstellung})$$

2. Nochmal Charaktere der zweidimensionalen Darstellung von  $S_3$ , vgl. mit Abschnitt 2.4.1 und ÜA 27:

$$\chi_{(3)}^{\square} = -1 \quad (\text{vollkommen abgebaut, 1 Vertikalschritt})$$

$$\chi_{(2,1)}^{\square} = 0 \quad (\text{kein reguläres Randstück der Länge 2})$$

$$\chi_{(1,1,1)}^{\square} = \chi_{(1,1)}^{\square} + \chi_{(1,1)}^{\square} = 1 + 1 = 2$$



- Eine nicht-rekursive (aber weniger effiziente) Methode geht wie folgt:
  - Bestimme alle Möglichkeiten  $\rho$ , das Young-Diagramm  $\Theta_\lambda$  durch aufeinanderfolgende Wegnahme von regulären Randstücken der Längen  $a_1, a_2, \dots, a_q$  (in dieser Reihenfolge) komplett abzubauen.
  - Die bei Möglichkeit  $\rho$  vorkommenden Randstücken enthalten insgesamt  $k_\rho$  Vertikalschritte.
  - Dann gilt

$$\chi_c^\lambda = \sum_{\rho} (-1)^{k_\rho} .$$

## 6 Lie-Gruppen

Statt Gruppen mit nur endlich vielen Elementen, betrachten wir nun auch unendliche Gruppen. Dabei ist es wichtig, sagen zu können, ob zwei Gruppenelemente nahe beieinander liegen, woraus dann ein Stetigkeitsbegriff für Abbildungen folgt. Die schwächste Möglichkeit, dies zu formulieren, ist topologisch.

Ich werde nicht alle grundlegenden Definitionen wiederholen sondern die Begriffe bei den Definitionen der jeweiligen Typen von Gruppen verwenden (siehe "Analysis II" oder "Mathematik für Physik III" für Begriffe wie: Topologischer Raum, Hausdorff-Raum, Metrischer Raum, offen, abgeschlossen, stetig, kompakt, zusammenhängend). Diejenigen Aspekte, die wir stärker nutzen, werden aber auch erklärt.

Im nächsten Schritt sollen unsere Gruppen dann auch analytische Eigenschaften haben, d.h. wir werden fordern, dass sie auch differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind.

Für die topologischen wie die differentialgeometrischen Strukturen gilt: Die Fälle, die uns bald genauer interessieren, sind die klassischen Lie-Gruppen, Gruppen von Matrizen, für die Ihnen diese Strukturen auch wieder expliziter vertraut sind.

### 6.1 Topologische Gruppen

**Definition:** (Topologische Gruppe)

Eine Menge  $G$  heißt topologische Gruppe, falls gilt:

- (i)  $G$  ist eine Gruppe,
- (ii)  $G$  ist ein topologischer Raum,
- (iii) die Abbildung  $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$  ist stetig, und
- (iv) die Abbildung  $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$  ist stetig.

**Beispiele:**

1. Parametrisiere  $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$  durch die Matrixelemente  $A_{ij} \in \mathbb{R}$ , d.h.  $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ , und wähle auf  $GL(n, \mathbb{R})$  die induzierte Topologie von  $\mathbb{R}^{n^2}$ .
  - Die Matrixelemente von  $C = AB$  sind algebraische Funktionen der  $A_{ij}$  und  $B_{kl}$ , d.h.  $(A, B) \mapsto AB$  ist stetig.
  - Ebenso  $A \mapsto A^{-1}$ , da die Matrixelemente von  $A^{-1}$  rationale, nicht-singuläre Funktionen der  $A_{jk}$  sind. $\Rightarrow$  So ist  $GL(n, \mathbb{R})$  eine topologische Gruppe.
2. Argumentiere genau gleich für  $O(n)$  oder  $SO(n)$  als Teilmengen von  $\mathbb{R}^{n^2}$  und für  $GL(n, \mathbb{C})$ ,  $U(n)$  oder  $SU(n)$  als Teilmengen von  $\mathbb{C}^{n^2}$ .

**Definition:** (isomorph)

Zwei topologische Gruppen  $G$  und  $H$  heißen isomorph zueinander, wenn es eine bijektive Abbildung  $f : G \rightarrow H$  gibt, die sowohl ein Gruppen-Isomorphismus als auch ein Homö-

morphismus zwischen den Räumen ist (d.h.  $f$  ist stetig und  $f^{-1}$  ist stetig<sup>15</sup>).

**Definition:** (Homogener Raum)

Ein topologischer Raum  $X$  heißt homogen, falls es für jedes Paar  $x, y \in X$  einen Homöomorphismus  $f : X \rightarrow X$  gibt, so dass  $f(x) = y$ .

**Bemerkung:** Jede topologische Gruppe  $G$  ist homogen, denn für  $g_1, g_2 \in G$  existiert ein eindeutiges  $h \in G$ , so dass  $g_2 = hg_1$  ( $h = g_2g_1^{-1}$ ). Damit ist  $f : g \mapsto hg$  ein Homöomorphismus, da die Gruppenmultiplikation stetig ist.

Die Homogenität erleichtert uns das Studium lokaler Eigenschaften enorm: Es genügt dabei, die Gruppe in der Nähe eines Elements zu untersuchen, z.B. in der Nähe der Identität!

Wenn wir später zusätzlich differenzieren können, dann können wir die lokalen Eigenschaften durch Entwickeln um die Identität untersuchen. Dies wird uns dann von den Lie-Gruppen zu den Lie-Algebren führen.

Wichtige globale Eigenschaften sind *Kompaktheit* und die Frage, ob die Gruppe *zusammenhängend* ist (ggf. einfach oder mehrfach zusammenhängend).

**Beispiele zur Kompaktheit:**

1. Betrachte  $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = \mathbb{1}\}$ . Die Matrixelemente  $A_{ij}$  von  $A \in O(n)$  erfüllen also

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i,k=1}^n A_{ik}^2 = n,$$

d.h. die Elemente von  $O(n)$  können als Punkte auf einer Sphäre mit Radius  $\sqrt{n}$  in  $\mathbb{R}^{n^2}$  dargestellt werden. Die Vereinigung all dieser Punkte ist eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n^2}$  und damit kompakt  $\Rightarrow O(n)$  ist kompakt.

Analog für  $U(n)$ .

2. Die Lorentz-Boosts  $\Lambda$  (Transformationen in ein gleichförmig mit Geschwindigkeit  $v$  bewegtes Koordinatensystem)

$$x'_0 = \frac{x_0 - \frac{v}{c}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x'_1 = \frac{x_1 - \frac{v}{c}x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (c: \text{Lichtgeschwindigkeit, } x_0 = c \cdot \text{Zeit})$$

bilden die Gruppe  $O(1, 1)$  und können (mit  $\beta = v/c$ ) als Matrizen

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

parametrisiert werden. Mit  $\beta \in (-1, 1)$  ist der Parameterbereich zwar beschränkt, aber nicht abgeschlossen  $\Rightarrow$  Die Lorentzgruppe ist nicht kompakt.

In der Parametrisierung durch die Rapidität  $t$  mit  $\beta = \tanh t$  (vgl. ÜA 10) ist die Nichtkompaktheit mit  $t \in \mathbb{R}$  vielleicht noch augenscheinlicher.

---

<sup>15</sup>Kurz:  $f$  erhält offene Mengen.

3.  $GL(n, \mathbb{R})$  ist nicht kompakt, denn  $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, aber auf  $GL(n, \mathbb{R})$  nicht beschränkt (denn  $|\det(\lambda A)| = |\lambda|^n |\det A|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ).

**Definition:** (Zusammenhangskomponente)

Die Zusammenhangskomponente von  $g \in G$  ist die Vereinigung aller zusammenhängenden Mengen, die  $g$  enthalten.

**Bemerkungen:**

1. Sei  $G_0 \subseteq G$  die Zusammenhangskomponente der Identität  $I$ .
2. Ist  $G$  zusammenhängend, so ist  $G_0 = G$ .
3. Ist  $G_0 = \{I\}$ , so ist  $G$  total unzusammenhängend, denn wegen der Homogenität enthalten auch alle anderen Zusammenhangskomponenten nur je ein Element.
4. Die Zusammenhangskomponente von  $g$  ist  $gG_0 = G_0g$ , da  $g \in gG_0$  (und  $\in G_0g$ ) und da Links- und Rechtsmultiplikation Homöomorphismen sind und damit zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden.
5. Damit ist  $G_0$  eine invariante Untergruppe.
6. Die Faktorgruppe  $G/G_0$  ist total unzusammenhängend, denn  $G/G_0 \cong \{gG_0 : g \in G\}$ , d.h. für zwei verschiedene Elemente  $h_1G_0 \neq h_2G_0$  kann  $h_2$  nicht in der Zusammenhangskomponente von  $h_1$  liegen (denn die ist ja gerade die Nebenklasse  $h_1G_0$ ).

**Beispiele:**

1.  $SU(2)$  ist zusammenhängend (sogar einfach), denn mit der Parametrisierung aus ÜA 19,

$$SU(2) \ni g = \begin{pmatrix} u & -v^* \\ v & u^* \end{pmatrix},$$

$$|u|^2 + |v|^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} u)^2 + (\operatorname{Re} v)^2 + (\operatorname{Im} v)^2 = 1,$$

ist  $SU(2)$  homöomorph zu  $S^3$ , und Sphären  $S^n$  mit  $n \geq 2$  sind (einfach) zusammenhängend.

2.  $O(n)$  ist nicht zusammenhängend, denn aus  $O^T O = \mathbb{1}$  folgt

$$1 = \det(OO^T) = (\det O)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \det O = \pm 1$$

d.h.  $O(n)$  hat zwei Zusammenhangskomponenten,  $SO(n) = \{O \in O(n) : \det O = 1\}$  und  $\{O \in O(n) : \det O = -1\}$ .

Bevor wir nun Lie-Gruppen allgemein definieren, diskutieren wir ein Beispiel, welches die Grundideen illustriert.

## 6.2 Beispiel: $SO(2)$

- $SO(2) =$  Gruppe der Drehungen der Ebene  $\mathbb{R}^2$  um den Ursprung

- Parametrisierung durch einen Parameter,  
natürliche Wahl: Drehwinkel  $\phi$  mit  $0 \leq \phi < 2\pi$ .  
(Man könnte auch eine monotone Funktion von  $\phi$  wählen.)
- Definierende Darstellung: Wirkung von  $SO(2)$  auf einen zweidimensionalen Vektor in der Ebene (d.h. als orthogonale  $2 \times 2$ -Matrix)

$$x_j \mapsto \sum_k R_{jk} x_k \quad \text{mit} \quad R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- $SO(2)$  ist abelsch, denn  $R(\phi_1)R(\phi_2) = R(\phi_1 + \phi_2) = R(\phi_2)R(\phi_1)$ .
- Ableitung:

$$\frac{dR}{d\phi}(\phi) = \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix}$$

... bei der Identität  $\mathbb{1}$  ( $\phi = 0$ )

$$\frac{dR}{d\phi}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: -iJ \quad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(Das  $i$  ist Physiker-Konvention.)

$J$  heißt *Generator* der Gruppe, denn...

- Suche eine Differentialgleichung vom Typ  $\frac{dR}{d\phi} = AR$ :

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\phi}(\phi) &= \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} \underbrace{R(\phi)^{-1} R(\phi)}_{=R(-\phi)} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} R(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R(\phi) = -iJR(\phi) \end{aligned}$$

Also löst  $R(\phi)$  das Anfangswertproblem  $\frac{dR}{d\phi} = -iJR$ ,  $R(0) = \mathbb{1} \Rightarrow R(\phi) = e^{-iJ\phi}$ .

- Mit  $J^2 = \mathbb{1}$  gilt

$$\begin{aligned} R(\phi) &= e^{-iJ\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} J^n \phi^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-i)^{2n}}{(2n)!}}_{=\frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathbb{1}} J^{2n} \phi^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-i)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{=-i \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} J} J^{2n+1} \phi^{2n+1} \\ &= \mathbb{1} \cos(\phi) - iJ \sin \phi. \quad \checkmark, \text{ vgl. } (*) \end{aligned}$$

- Die definierende Darstellung ist reduzibel und kann durch Diagonalisierung von  $J$  reduziert werden:

$J = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  hat Eigenwerte  $\pm 1$  mit Eigenvektoren  $e_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$ , d.h.

$$Je_{\pm} = \pm e_{\pm} \quad \Rightarrow \quad R(\phi)e_{\pm} = e^{\mp i\phi}e_{\pm}$$

Wir finden also zwei eindimensionale (und damit irreduzible) unitäre Darstellungen,  $e^{\pm i\phi}$ .

- Betrachte nun einen Vektorraum  $V$ ,  $\dim V = n$ , und eine Darstellung von  $SO(2)$  durch unitäre Matrizen  $U(\phi)$  auf  $V$ .

Wir können immer schreiben

$$U(\phi) = e^{-iJ\phi}$$

mit einer hermiteschen  $n \times n$ -Matrix  $J$ , denn damit gilt

$$\begin{aligned} U(\phi_1)U(\phi_2) &= e^{-iJ\phi_1}e^{-iJ\phi_2} = e^{-iJ(\phi_1+\phi_2)} \quad (\text{da die Exponenten vertauschen}) \\ &= U(\phi_1 + \phi_2) \quad \text{und} \\ U(\phi)^{\dagger} &= e^{iJ^{\dagger}\phi} = e^{iJ\phi} = U(-\phi) = U(\phi)^{-1} \end{aligned}$$

Indem wir  $J$  diagonalisieren können wir  $U$  immer vollständig reduzieren  $\Rightarrow$  Alle unitären irreduziblen Darstellungen sind eindimensional (gilt auch hier wieder, weil  $SO(2)$  abelsch ist).

- Suche nun eindimensionale unitäre Darstellungen, d.h.  $J \in \mathbb{R}$ . Wegen  $U(2\pi) = U(0)$  muss gelten

$$e^{-2\pi i J} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad J = m \in \mathbb{Z}$$

d.h. die unitären irreduziblen Darstellungen  $U^m(\phi) = e^{-im\phi}$  sind durch ganze Zahlen  $m$  charakterisiert:

(i)  $m = 0$ :  $R(\phi) \rightarrow U^0(\phi) = 1$  (triviale Darstellung)

(ii)  $m = 1$ :  $R(\phi) \rightarrow U^1(\phi) = e^{-i\phi}$

Das ist ein Isomorphismus zwischen  $SO(2)$  und den komplexen Zahlen auf dem Einheitskreis, d.h.  $SO(2) \cong U(1)$ , und alles Gesagte gilt ebenso für  $U(1)$ .

(iii)  $m = -1$ :  $R(\phi) \rightarrow U^{-1}(\phi) = e^{i\phi}$ ,

wie (ii), aber der Einheitskreis wird entgegengesetzt durchlaufen.

(iv)  $m = \pm 2$ :  $R(\phi) \rightarrow U^{\pm 2}(\phi) = e^{\mp 2i\phi}$ .

Homomorphismus  $SO(2) \rightarrow U(1)$ , wobei der Einheitskreis zweimal durchlaufen wird.

Analog für höhere  $m$ .

Nur die Darstellungen für  $m = \pm 1$  sind treu.

- Sei  $f : \text{SO}(2) \rightarrow \mathbb{C}$  (hinreichend hübsch)  
 Parametrisiert man  $\text{SO}(2)$  durch den Drehwinkel  $\phi$ , so muss  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion von  $\phi$  sein. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{d\phi}{2\pi}$$

invariant unter  $\phi \mapsto \phi + \alpha$  für jedes feste  $\alpha$ . Normierung so gewählt, dass  $|\text{SO}(2)| = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} = 1$ .

Damit: *Orthogonalität* der Darstellungsmatrizen bzw. Charaktere (vgl. Satz 6 und Korollar zu Satz 6),

$$\int_0^{2\pi} U^m(\phi)^* U^n(\phi) \frac{d\phi}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\phi} \frac{d\phi}{2\pi} = \delta_{mn},$$

und *Vollständigkeit* (vgl. ÜA 16), d.h. die Fourier-Reihe von  $f$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\phi} c_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} U^n(\phi) c_n$$

mit 
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\phi'} f(\phi') d\phi' = \int_0^{2\pi} U^n(\phi')^* f(\phi') \frac{d\phi'}{2\pi},$$

konvergiert gegen  $f$  (punktweise für stetige  $f$ , sonst z.B. im  $L^2$ -Sinne),  
 Physiker-Kurzschreibweise:

$$f(\phi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} U^n(\phi) U^n(\phi')^*}_{=\delta(\phi-\phi')} f(\phi') d\phi'.$$

( $\delta$ -Funktion als Integralkern der Fourierentwicklung)

### 6.3 Lie-Gruppen

**Definition:** (Lie-Gruppe)

Eine Menge  $G$  heißt Lie-Gruppe, falls gilt:

- (i)  $G$  ist eine Gruppe,
- (ii)  $G$  ist eine analytische Mannigfaltigkeit,
- (iii) die Abbildung  $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$  ist analytisch, und
- (iv) die Abbildung  $G \times G \ni (g, h) \mapsto gh \in G$  ist analytisch.

### Bemerkungen:

1. Eine  $n$ -dimensionale analytische Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Hausdorff-Raum mit einem System von Karten  $(U_j, \varphi_j)$ , d.h.  $U_j \subseteq M$  offen und Homöomorphismen  $\varphi_j : U_j \rightarrow \varphi(U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ , mit
  - (i)  $M = \bigcup_j U_j$  und
  - (ii)  $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1} : \varphi_k(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_j(U_j \cap U_k)$  analytisch  $\forall j, k$   
(d.h. in konvergente Potenzreihen entwickelbar).
2. Praktisch bedeutet das, wir können die Gruppenelemente lokal als analytische Funktionen von  $n$  Parametern angeben, wobei  $n$  die Dimension von  $G$  (als Mannigfaltigkeit) ist, genauer:

Betrachte die Karte  $(U, \varphi)$  und  $g, h, gh \in U$ . Bezeichne mit  $x_j$  die Koordinaten von  $g$ , und mit  $y_j$  die Koordinaten von  $h$ , d.h.

$$\begin{aligned}\varphi(g) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n \\ \varphi(h) &= (y_1, y_2, \dots, y_n) = y.\end{aligned}$$

Dann sind die Koordinaten  $z_j$  von  $gh$ ,

$$\varphi(gh) = (z_1, z_2, \dots, z_n) = z,$$

analytische Funktionen von  $x$  und  $y$ ,

$$z_j = f_j(x, y).$$

Analog sind die Koordinaten von  $g^{-1}$  analytische Funktionen von  $x$ .

3. Wähle nun ein  $U$  mit  $I \in U$  mit  $\varphi$  so, dass  $\varphi(I) = 0 \in \mathbb{R}^n$ , und  $f$  wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned}f_j(x, 0) &= x_j, & f_j(0, y) &= y_j \\ \text{und damit} & \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(0, 0) = \frac{\partial f_j}{\partial y_k}(0, 0) = \delta_{jk} \\ \text{sowie} & \quad \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_l}(0, 0) = \frac{\partial^2 f_j}{\partial y_k \partial y_l}(0, 0) = 0.\end{aligned}$$

Entwickle  $f(x, y)$  um  $(0, 0)$ ,

$$f(x, y) = x_j + y_j + \sum_{k,l} \underbrace{\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial y_l}(0, 0)}_{=: a_{kl}^j} x_k y_l + \dots$$

und definiere

$$c_{kl}^j := a_{kl}^j - a_{lk}^j,$$

genannt *Strukturkonstanten der Lie-Gruppe* (koordinatenabhängig). Es gilt:



- (i) Für abelsche Gruppen sind die  $c_{kl}^j = 0$ , denn dann gilt  $f(x, y) = f(y, x)$ .
- (ii)  $c_{kl}^j = -c_{lk}^j$
- (iii)  $\sum_l (c_{kl}^j c_{nm}^l + c_{nl}^j c_{mk}^l + c_{ml}^j c_{kn}^l) = 0$

Letzteres folgt aus der Assoziativität der Gruppenmultiplikation, wenn man in den Koordinatenentwicklungen von  $g(h\tilde{g})$  und  $(gh)\tilde{g}$  die Terme dritter Ordnung vergleicht.

### Beispiele: Matrixgruppen

1. Betrachte die Matrixelemente  $A_{ij} \in \mathbb{R}$  eines Elements  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  als die Koordinaten. Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det A$$

ist stetig, d.h. das Urbild  $\psi^{-1}(0)$  der abgeschlossenen Menge  $\{0\}$  ist abgeschlossen.  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  ist das Komplement von  $\psi^{-1}(0)$  und damit offen und eine analytische Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

- Die Matrixelemente von  $C = AB$  sind algebraische Funktionen der  $A_{ij}$  und  $B_{kl}$ , d.h.  $(A, B) \mapsto AB$  ist analytisch.
- Ebenso  $A \mapsto A^{-1}$ , da die Matrixelemente von  $A^{-1}$  rationale, nicht-singuläre Funktionen der  $A_{jk}$  sind.

Damit ist  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  eine Lie-Gruppe.

2. Für  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  betrachte Real- und Imaginärteile der Matrixelemente als Koordinaten und argumentiere wie oben (als Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^{2n^2}$ ).
3. Für Gruppen wie  $\text{O}(n)$ ,  $\text{U}(n)$ ,  $\text{SO}(n)$  oder  $\text{SU}(n)$  stellt man zunächst fest, dass sie abgeschlossene Untergruppen von  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  oder  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  sind, für welche man wiederum zeigen kann, dass sie Lie-Gruppen sind. (Wir betrachten sie später expliziter.)

## 6.4 Lie-Algebren

**Definition:** Eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist ein Vektorraum über einem Körper  $K$  ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ), mit einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

genannt *Lie-Klammer*, welche die folgenden Bedingungen erfüllt ( $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ):

- (i)  $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z] \quad \forall \lambda, \mu \in K$  (Linearität)
- (ii)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (Antisymmetrie)
- (iii)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$  (Jacobi-Identität)

### Bemerkungen:

1. Eine Lie-Algebra heißt kommutativ, falls  $[X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$ .
2. Man kann zeigen, dass der Tangentialraum an eine Lie-Gruppe  $G$  in der Identität eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  ist.

Dazu betrachtet man Kurven  $g(t)$  in  $G$  mit  $g(0) = I$ . Die Ableitung bei  $t = 0$  ist dann ein Tangentialvektor.

Für Matrixgruppen können wir die Lie-Algebra-Elemente, genannt Generatoren, explizit durch

$$-i\dot{g}(0) := -i\frac{dg}{dt}(0) \in \mathfrak{g}$$

als Matrizen definieren. Die Lie-Klammer ist dann der Matrix-Kommutator,<sup>16</sup>

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Man überzeugt sich leicht, dass der Kommutator die notwendigen Eigenschaften (i)–(iii) erfüllt: Linearität und Antisymmetrie sind offensichtlich, die Jacobi-Identität rechnet man explizit nach.

Bleibt zu zeigen, dass aus  $X, Y \in \mathfrak{g}$  folgt, dass auch  $(-i)[X, Y] \in \mathfrak{g}$ .

Betrachte dazu zwei Kurven mit

$$\begin{aligned} g(0) &= I = h(0) \quad \text{und} \\ \dot{g}(0) &= iX, \quad \dot{h}(0) = iY, \end{aligned}$$

und entwickle

$$F(s, t) := h(s)^{-1} g(t)^{-1} h(s) g(t)$$

für kleine  $s$  und  $t$ . Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= I = F(0, t) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial t}(0, 0) &= 0 = \frac{\partial F}{\partial s}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, 0) = 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(0, 0) \end{aligned}$$

d.h. (bis auf Terme kubischer und höherer Ordnung)

$$F(s, t) = I + \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(0, 0) st + \dots$$

Lese  $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(0, 0)$  ab, aus  $ts$ -Koeffizient von

$$\begin{aligned} h(s)^{-1} g(t)^{-1} h(s) g(t) &= \underbrace{(I + iYs + \dots)^{-1}}_{=(1-iYs+\dots)} \underbrace{(I + iXt + \dots)^{-1}}_{=(1-iXt+\dots)} (I + iYs + \dots) (I + iXt + \dots) \\ &= \dots + st((-iY)(-iX) + (-iY)(iX) + (-iX)(iY) + (iY)(iX)) + \dots \\ &= \dots + st(XY - YX) + \dots, \end{aligned}$$

d.h.

$$F(s, t) = I + i st (-i)(XY - YX) + \dots$$

---

<sup>16</sup>genauer: i mal der Kommutator, s.u.

Dies ist ebenfalls die Entwicklung eines Gruppenelements um  $I$ , d.h.  $(-i)[X, Y] \in \mathfrak{g}$ .

Mit einer Basis  $\{X_j\}$  von  $\mathfrak{g}$  gilt

$$[X_j, X_k] = i \sum_l c_{jk}^l X_l$$

mit den *Strukturkonstanten*  $c_{jk}^l$  der Lie-Algebra (basisabhängig).

Diese sind gleich den Strukturkonstanten der Lie-Gruppe (siehe Abschnitt 6.3) – bei passender Basis- bzw. Koordinatenwahl: Als Basis  $\{X_j\}$  von  $\mathfrak{g}$  wähle die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien in einer Karte  $U \ni I$ , d.h. für Matrixgruppen in einer expliziten Parametrisierung durch Ableiten nach den Parametern,

$$\begin{aligned} X_j &= -i\dot{g}(0) \quad \text{mit} \quad g(t) = \varphi^{-1}(0, \dots, 0, x_j = t, 0, \dots, 0), \\ \text{also} \quad X_j &= -i \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_j}(0). \end{aligned}$$

In Abschnitt 6.3 haben wir  $gh - hg$  entwickelt, hier  $I - h^{-1}g^{-1}hg$ . Die Eigenschaften (ii) & (iii) der Strukturkonstanten aus Abschnitt 6.3 folgen nun aus den Lie-Klammer-Eigenschaften (ii) & (iii) des Kommutators.

**3.** Es genügt nun, Ein-Parameter-Untergruppen (nicht zwingend notwendig, vereinfacht aber das Folgende) zu betrachten, d.h. Lösungen von

$$\dot{g}(t) = iXg(t), \quad g(0) = I.$$

mit  $X \in \mathfrak{g}$ . Man schreibt  $g(t) = \exp(iXt)$ . Für Matrixgruppen ist diese Exponentialfunktion durch die überall absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$\exp(itX) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(it)^\nu}{\nu!} X^\nu$$

gegeben (vgl. ÜA 30).

Für die speziellen Gruppen mit  $\det g = 1$  sind die Generatoren spurlos, denn

$$\det g(t) = \det(e^{itX}) = e^{it \operatorname{tr} X} \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tr} X = 0.$$

Für unitäre Gruppen mit  $gg^\dagger = \mathbb{1}$  sind die Generatoren hermitesch, denn

$$g(t)^\dagger = g(t)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-itX^\dagger} = e^{-itX} \quad \Leftrightarrow \quad X = X^\dagger.$$

(Vergleiche beide Male ÜA 30.)

**Beispiele:**

1.  $G = \text{SO}(3)$ , also Drehungen in 3 Dimensionen. Definierende Darstellung durch  $3 \times 3$ -Matrizen  $R$ ,

$$\vec{x} \mapsto R\vec{x},$$

z.B. Drehung um Winkel  $\phi$  um die  $z$ -Achse:

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Generator:

$$J_3 := J_z := -i \frac{dR_z}{d\phi}(0) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$$

(hermitesch und spurlos). Analog für Drehungen um  $x$ - und  $y$ -Achse,

$$J_1 := J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_2 := J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet explizit nach, dass  $[J_x, J_y] = iJ_z$  etc., also

$$[J_j, J_k] = -i \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} J_l$$

mit den Strukturkonstanten von  $\text{SO}(3)$  bzw.  $\mathfrak{so}(3)$ :

$$\varepsilon_{jkl} = \begin{cases} 1, & j, k, l \text{ zyklisch} \\ 0, & \text{mind. 2 Indizes gleich} \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

2.  $G = O_A$ -Operatoren für Drehungen (betrachte wieder entweder als Gruppenelemente einer Gruppe  $G$  isomorph zu  $\text{SO}(3)$  oder als Darstellung von  $\text{SO}(3)$ ), wirken auf Funktionen  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  (vgl. Abschnitt 2.4.1), durch

$$(O_R f)(\vec{x}) = f(R^{-1}\vec{x}) \quad \text{mit } R \in \text{SO}(3).$$

Wieder Drehung um Winkel  $\phi$  um  $z$ -Achse:

$$(O_{R_z(\phi)} f)(x, y, z) = f\left(R_z(\phi)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f(x \cos \phi + y \sin \phi, -x \sin \phi + y \cos \phi, z)$$

Generator (betrachte entweder als Element von  $\mathfrak{g}$  oder als Darstellung eines Elements von  $\mathfrak{so}(3)$ ):

$$-i \frac{d}{d\phi} (O_{R_z(\phi)} f)(x, y, z) \Big|_{\phi=0} = -i \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) y + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) (-x) \right) = i \underbrace{\left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)}_{\in \mathfrak{g}} f(\vec{x})$$

In der Quantenmechanik nennt man  $L_z = \frac{1}{i}(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$  die  $z$ -Komponente des Drehimpulsoperators  $\vec{L} = \vec{x} \times (\frac{\hbar}{i}\nabla)$  (hier  $\hbar = 1$ ). Kommutatoren und Strukturkonstanten wie in Beispiel 1.

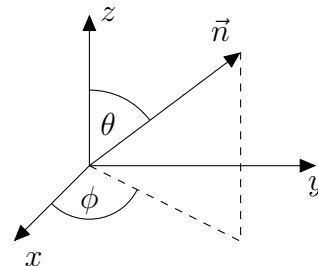
**Bemerkung:** In der Physik sind die Generatoren Operatoren, die physikalisch meßbaren Größen (Observablen) entsprechen.

## 6.5 Mehr zu SO(3)

Wir machen uns einige globale Eigenschaften von SO(3) anschaulich anhand einer expliziten Parametrisierung klar.

- SO(3) = Drehgruppe in 3 Dimensionen: 3 reelle Parameter  
Betrachte z.B. eine orthogonale Matrix  $R \in SO(3)$  als bestehend aus drei orthonormalen Spalten: 1. Spalte frei wählbar  $\rightsquigarrow$  zwei Parameter (Winkel – Punkt auf einer 2-Sphäre), 2. Spalte senkrecht dazu, sonst beliebig  $\rightsquigarrow$  ein Parameter (Winkel).
- Wir können eine Drehung als  $R_{\vec{n}}(\psi)$  parametrisieren, mit dem Drehwinkel  $\psi$  und der Drehachse  $\vec{n}$ ,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} .$$



- Intervalle der Parameter:

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq \phi < 2\pi$$

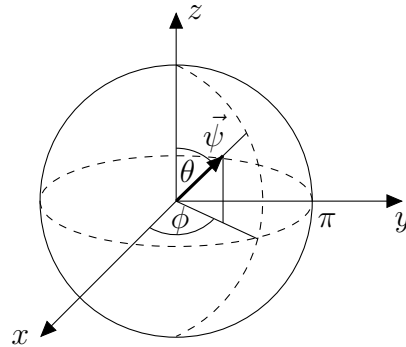
$$0 \leq \psi \leq \pi \quad (\text{Denn wir haben } \vec{n} \text{ und } -\vec{n}.)$$

- Drehungen um eine feste Achse bilden eine Untergruppe von SO(3). Diese ist isomorph zu SO(2) (vgl. Abschnitt 6.2).
- Für eine beliebige Drehung  $R \in SO(3)$  gilt (ggf. selbst beweisen)

$$RR_{\vec{n}}(\psi)R^{-1} = R_{\vec{n}'}(\psi) \quad \text{mit } \vec{n}' = R\vec{n} .$$

Daraus folgt, dass alle Drehungen um denselben Winkel zur gleichen Konjugationsklasse gehören.

- Eine Drehung entspricht einem Vektor  $\vec{\psi} = \psi \vec{n}$ .  
Die Spitzen dieser Vektoren füllen eine Kugel  $K$  mit Radius  $\pi$  aus:



Wählen wir die kartesischen Komponenten von  $\vec{\psi}$  als Parameter, so erhalten wir mit  $-i \partial R / \partial \psi_j$  die Erzeuger aus Abschnitt 6.4.

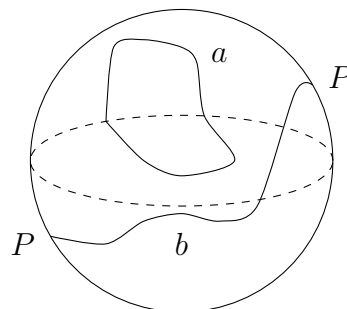
Zurück zu Parametrisierung durch  $\theta, \phi, \psi \dots$

- Die Parametrisierung hat eine Redundanz,

$$R_{-\vec{n}}(\pi) = R_{\vec{n}}(\pi).$$

Deshalb müssen Punkte, die sich auf der Oberfläche der Kugel  $K$  diametral gegenüberliegen, miteinander identifiziert werden.

- Folglich gibt es in  $SO(3)$  zwei Arten von geschlossenen Kurven.
  - (a) Solche, die sich durch stetige Deformationen zu einem Punkt zusammenziehen lassen.
  - (b) Solche, für die dies nicht möglich ist.



Auch Kurve  $b$  ist in  $SO(3)$  geschlossen!

Diese globalen Eigenschaften beeinflussen die möglichen Darstellungen der Gruppe (später).

## Alternative Parametrisierung durch Euler-Winkel

- Jede Drehung kann auch durch Euler-Winkel ausgedrückt werden,

$$R = R_3(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma)$$

mit

$$R_2(\psi) = R_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$
$$R_3(\psi) = R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Intervalle der Parameter:

$$0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi$$

$$0 \leq \beta \leq \pi$$

- Zusammenhang mit den Achse-Winkel Parametern:

$$\phi = \frac{1}{2}(\pi + \alpha - \gamma)$$

$$\tan \theta = \frac{\tan \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \gamma}{2}}$$

$$\cos \psi = 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2} - 1$$

## 6.6 Invariante Integration: Das Haar-Maß

In der Darstellungstheorie endlicher Gruppen benutzen wir oft das Umordnungstheorem in der Form

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{g \in G} f(hg) = \sum_{g \in G} f(gh) \quad \forall h \in G.$$

Für kontinuierliche Gruppen möchten wir gerne  $\sum_{g \in G} f(g)$  durch ein Integral,  $\int_G f(g) d\mu(g)$ , ersetzen. Dazu benötigen wir ein invariantes Maß  $\mu$ .

### Satz 18. (Haar-Maß)

*Jede kompakte topologische Gruppe besitzt ein rechts- und links-invariantes Maß  $\mu$ , genannt Haar-Maß. Dieses ist bis auf Normierung eindeutig.*

(ohne Beweis – aber für kompakte Lie-Gruppen geben wir gleich eine Konstruktionsvorschrift für  $\mu$  an)

**Bemerkungen:**

1. Das heißt

$$\mu(gA) = \mu(Ag) = \mu(A)$$

$\forall g \in G$  und alle Borel-Mengen  $A \subset G$ , bzw.

$$d\mu(gh) = d\mu(hg) = d\mu(g) \quad \forall g, h \in G.$$

2. Normiere im Folgenden so, dass

$$|G| = \int_G d\mu(g) = 1.$$

3. Es gilt also (z.B. für stetige Funktionen  $f$ )

$$\int_G f(hg) d\mu(g) \stackrel{g'=hg}{=} \int_G f(g') d\mu(h^{-1}g') = \int_G f(g') d\mu(g') \quad \text{und}$$

$$\int_G f(gh) d\mu(g) \stackrel{g'=gh}{=} \int_G f(g') d\mu(g'h^{-1}) = \int_G f(g') d\mu(g').$$

4. Außerdem folgt  $\int_G f(g^{-1}) d\mu(g) = \int_G f(g) d\mu(g)$  bzw.  $d\mu(g^{-1}) = d\mu(g)$ , denn

$$\int_G f(g^{-1}) d\mu(g) = \int_G f(hg^{-1}) d\mu(g) = \int_G \underbrace{\int_G f(hg^{-1}) d\mu(h)}_{\int_G f(h) d\mu(h)} d\mu(g) \stackrel{\int_G d\mu(g)=1}{=} \int_G f(h) d\mu(h).$$

5. Man kann unter noch allgemeineren Voraussetzungen invariante Maße finden, z.B. haben auch lokalkompakte Gruppen (wie  $GL(n, \mathbb{R})$  oder die Lorentz-Gruppe) bis auf Normierung eindeutige linksinvariante und rechtsinvariante Maße, diese sind aber i.A. nicht gleich.

Viele Eigenschaften folgen nun bereits aus der Existenz eines Haar-Maßes – man muss es nicht explizit kennen. Trotzdem zunächst...

### 6.6.1 Berechnung des Haar-Maßes von Lie-Gruppen

Parametrisiere die Gruppenelemente durch  $n = \dim G$  Parameter, d.h.  $g = g(x_1, \dots, x_n)$ , dann gilt (lokal)

$$d\mu(g) = \varrho(x_1, \dots, x_n) d^n x$$

mit einer geeigneten Dichte  $\varrho(x)$  und dem Lebesgue-Maß  $d^n x = dx_1 \dots dx_n$ . Konstruiere nun  $\tilde{\varrho}$ , so dass die Invarianz erfüllt ist.

Zunächst: Verhalten von  $\varrho$  unter Umparametrisierung (Koordinatenwechsel)  $x = f(y)$ :

$$d\mu(g) = \varrho(x) d^n x = \varrho(f(y)) \underbrace{\left| \det \left( \frac{\partial f}{\partial y}(y) \right) \right|}_{\text{Jacobi-Det.}} d^n y =: \tilde{\varrho}(y) d^n y$$



Entwickle nun  $(-i)g(x)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$  in eine Basis  $\{X_k\}$  der Lie-Algebra,

$$g(x)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = i \sum_k X_k A(x)_{kj}$$

Das geht, denn falls  $g(x) = I$ , dann ist der Ausdruck ein Generator, und sonst liegt  $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$  im Tangentialraum an der Stelle  $g(x)$  und wird von  $g^{-1}(x)$  in den Tangentialraum an  $I$  transportiert.

Oder beachte explizit  $h(x, y) := g(x)^{-1}g(x + y)$  für festes  $x$  als Kurve in  $G$ . Dann gilt  $h(x, 0) = I$  und damit

$$\frac{\partial h}{\partial y_j}(x, 0) = g(x)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \in \mathfrak{g}.$$

**Behauptung:** Die Dichte  $\varrho(x) := |\det A(x)|$  definiert ein links-invariantes Maß.

**Beweis:**

- (i) Prüfe zunächst das Verhalten unter Koordinatenwechseln  $x = f(y)$ . Nenne dazu  $g(f(y)) =: \tilde{g}(y)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{g}(y)^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_j}(y) &= g(f(y))^{-1} \sum_l \frac{\partial g}{\partial x_l}(f(y)) \frac{\partial f_l}{\partial y_j}(y) \\ &= i \sum_{l,k} X_k A(f(y))_{kl} \frac{\partial f_l}{\partial y_j}(y) \quad \stackrel{!}{=} i \sum_k X_k \tilde{A}(y)_{kj}, \end{aligned}$$

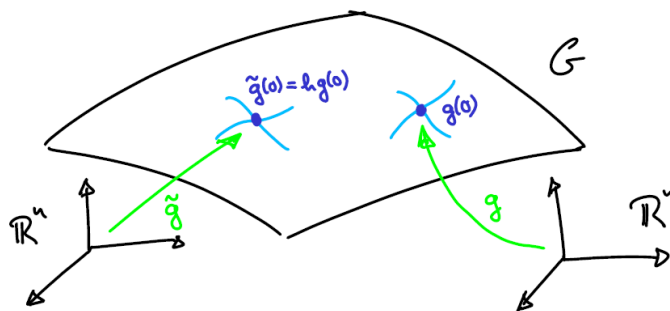
d.h.  $\tilde{A}(y) = A(f(y)) \frac{\partial f}{\partial y}(y)$  und damit

$$\tilde{\varrho}(y) = |\det \tilde{A}(y)| = \underbrace{|\det A(f(y))|}_{\varrho(f(y))} \left| \det \frac{\partial f}{\partial y}(y) \right|$$

wie gewünscht.

- (ii) Wähle nun die spezielle Parametrisierung von  $\tilde{g} := hg$  durch

$$\tilde{g}(x) = h \cdot g(x).$$



Dann gilt

$$\tilde{g}(x)^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_j}(x) = (h \cdot g(x))^{-1} h \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = g(x)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$$

d.h.  $\tilde{\varrho}(x) = \varrho(x)$  und damit folgt die geforderte Invarianz,

$$d\mu(hg) = \tilde{\varrho}(x) d^n x = \varrho(x) d^n x = d\mu(g).$$

(iii) Eine beliebige andere Parametrisierung von  $hg$  erreichen wir durch einen weiteren Koordinatenwechsel wie in (i). □

**Prüfe nun Rechtsinvarianz:** Wähle Parametrisierung von  $\tilde{g} := gh$  durch

$$\tilde{g}(x) = g(x) \cdot h.$$

Es folgt

$$\tilde{g}(x)^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_j}(x) = h^{-1} g(x)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) h = h^{-1} \mathfrak{i} \sum_k X_k A(x)_{kj} h.$$

Da  $h^{-1} X_k h \in \mathfrak{g}$ ,<sup>17</sup> können wir schreiben  $h^{-1} X_k h = \sum_l X_l \varphi(h)_{lk}$  mit einer Matrix  $\varphi(h)$ , also

$$\tilde{g}(x)^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_j}(x) = \mathfrak{i} \sum_{kl} X_l \varphi(h)_{lk} A(x)_{kj} =: \mathfrak{i} \sum_l X_l \tilde{A}(x)_{lj}$$

d.h.  $\tilde{A}(x) = \varphi(h)A(x)$  und damit

$$\begin{aligned} d\mu(gh) &= \tilde{\varrho}(x) d^n x = |\det \tilde{A}(x)| d^n x = |\det \varphi(h)| |\det A(x)| d^n x \\ &= |\det \varphi(h)| \varrho(x) d^n x = |\det \varphi(h)| d\mu(g) \end{aligned}$$

Der Faktor  $|\det \varphi(h)|$  heißt *Modularfunktion* von  $G$ . Falls  $|\det \varphi(h)| = 1 \forall h \in G$ , so heißt  $G$  unimodular, und das linksinvariante Maß ist auch rechtsinvariant.

Betrachte nun

$$\int_G f(gh) d\mu(g) \stackrel{g'=gh}{=} \int_G f(g') d\mu(g'h^{-1}) = |\det \varphi(h^{-1})| \int_G f(g') d\mu(g')$$

und wähle für kompaktes  $G$  die konstante Funktion  $f \equiv 1$ . Dann gilt

$$\int_G d\mu(g) = |\det \varphi(h^{-1})| \int_G d\mu(g)$$

d.h. kompakte Lie-Gruppen sind unimodular.

---

<sup>17</sup>Sei  $g(t)$  eine Kurve mit  $g(0) = I$  und  $\dot{g}(0) = X \Rightarrow \tilde{g}(t) = hg(t)h^{-1}$  ist Kurve mit  $\tilde{g}(0) = I$  und  $-\mathfrak{i}\dot{\tilde{g}}(0) = hXh^{-1}$ , d.h.  $hXh^{-1} \in \mathfrak{g} \forall h \in G$ , vgl. auch ÜA 24 & 25.

**Triviales Beispiel:**  $SO(2)$  (vgl. Abschnitt 6.2)

Parametrisierung

$$g(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

Generator

$$X = -i \frac{dg}{d\phi}(0) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$g(\phi)^{-1} \frac{dg}{d\phi}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & -\sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = iX,$$

d.h.  $A(\phi) = 1$  und damit  $d\mu(\phi) = d\phi$  (wie erwartet).

Nun zu dem, was wir bereits ohne explizite Kenntnis des Haar-Maßes schließen können. . .

## 6.7 Eigenschaften kompakter Lie-Gruppen

Die Sätze 3 und 6 (inkl. Korollar) für Darstellungen endlicher Gruppen gelten auch für stetige Darstellungen kompakter Lie-Gruppen, wenn man in Sätzen und Beweisen

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \dots \quad \text{durch} \quad \int_G \dots d\mu(g)$$

ersetzt, d.h.:

- (i) Jede endlichdimensionale Darstellung ist äquivalent zu einer unitären Darstellung.
- (ii) Die Elemente der Darstellungsmatrizen unitärer, irreduzibler Darstellungen  $\Gamma^\mu, \Gamma^\nu$  (nicht-äquivalent für  $\mu \neq \nu$ ) sind orthogonal, d.h.

$$\int_G (\Gamma^\mu(g)_{jk})^* \Gamma^\nu(g)_{j'k'} d\mu(g) = \frac{1}{d_\mu} \delta_{\mu\nu} \delta_{jj'} \delta_{kk'}$$

wobei  $d_\mu = \dim \Gamma^\mu$ .

- (iii) Ebenso die Charaktere  $\chi^\mu(g) = \text{tr} \Gamma^\mu(g) = \sum_j \Gamma^\mu(g)_{jj}$ ,

$$\int_G \chi^\mu(g)^* \chi^\nu(g) d\mu(g) = \delta_{\mu\nu}.$$

Daraus folgt wieder:

$$\Gamma \text{ ist irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \int_G |\chi(g)|^2 d\mu(g) = 1 \quad (\text{wobei } \chi(g) = \text{tr} \Gamma(g)),$$

sowie: Ist  $\Gamma$  direkte Summe irreduzibler Darstellungen  $\Gamma^\mu$ , also  $\Gamma = \sum_{\mu \in \oplus} a_\mu \Gamma^\mu$ , so gilt

$$a_\mu = \int_G \chi^\mu(g)^* \chi(g) d\mu(g).$$

Für endliche Gruppen galt außerdem die Vollständigkeit der Elemente der Darstellungsmatrizen (vgl. ÜA 16) bzw. die vollständige Reduzierbarkeit der Gruppenalgebra  $\mathcal{A}(G)$  und der auf ihr operierenden regulären Darstellung (vgl. Abschnitt 4.3). Daraus folgte, dass es nur endlich viele nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen gab (Abschnitt 2.7).

Ähnlich kann man für kompakte Lie-Gruppen  $G$  zeigen, dass sie abzählbar viele nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen haben. Diese haben stets endliche Dimension. Außerdem kann jede stetige Darstellung in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen zerlegt werden. Basis hierfür ist das *Peter-Weyl-Theorem*.

Betrachte den Vektorraum  $C(G)$  stetiger Funktionen  $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  mit Skalarprodukt

$$\langle \phi | \psi \rangle := \int_G \phi(g)^* \psi(g) d\mu(g)$$

(vgl. die obigen Orthogonalitätsbeziehungen für Matrixelemente und Charaktere irreduzibler Darstellungen). Die Rolle der regulären Darstellung übernimmt die Darstellung  $\Gamma$ , definiert durch

$$(\Gamma(h)\phi)(g) = \phi(h^{-1}g) \quad \forall h \in G.$$

Darstellung, da

$$(\Gamma(h')(\Gamma(h)\phi))(g) = (\Gamma(h)\phi)(h'^{-1}g) = \phi(h^{-1}h'^{-1}g) = (\Gamma(h'h)\phi)(g),$$

wie bei den  $O_A$ -Operatoren, vgl. z.B. Abschnitt 2.4.1.

### Satz 19. Peter-Weyl-Theorem

Sei  $G$  eine kompakte Lie-Gruppe mit nicht-äquivalenten irreduziblen Darstellungen  $\Gamma^\mu$ ,  $\dim \Gamma^\mu = d_\mu$ . Dann bilden die Matrixelemente  $\sqrt{d_\mu} \Gamma^\mu(g)_{jk}$ ,  $j, k = 1, \dots, d_\mu$ , ein vollständiges Orthonormalsystem von  $C(G)$ .

(ohne Beweis)

### Bemerkungen:

- Wir können also jede Funktion  $f \in C(G)$  entwickeln als

$$f(g) = \sum_{\mu, j, k} c_{\mu j k} \Gamma^\mu(g)_{jk}$$

wobei

$$c_{\mu j k} = d_\mu \int_G \Gamma^\mu(g)_{jk}^* f(g) d\mu(g).$$

Dies verallgemeinert die Fourierentwicklung (erhalten wir für  $SO(2)$  bzw.  $U(1)$ , vgl. Abschnitt 6.2).

- Vollständigkeit in Physiker-Schreibweise:

$$\sum_{\mu, j, k} d_\mu \Gamma^\mu(g)_{jk} \Gamma^\mu(g')_{jk}^* = \delta(g - g')$$

wobei

$$\int_G \delta(g - g') f(g) d\mu(g) = f(g).$$

## 6.8 Irreduzible Darstellungen von $SO(3)$

Für jedes  $g \in SO(3)$  existiert ein  $X \in \mathfrak{so}(3)$ , so dass  $g = e^{iX}$ . Wähle z.B. folgende Basis von  $\mathfrak{so}(3)$ ,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(Generatoren aus Abschnitt 6.4 mal  $(-1)$ ) mit

$$[J_j, J_k] = i \sum_l \varepsilon_{jkl} J_l.$$

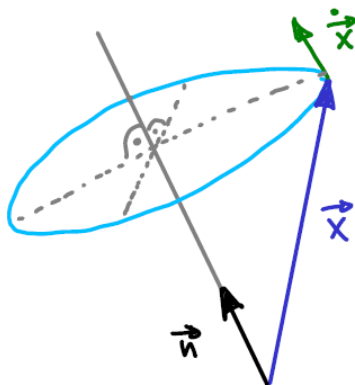
Dann gilt

$$R_{\vec{n}}(\psi) = e^{-i\psi \vec{n} \cdot \vec{J}} \quad \text{wobei} \quad \vec{n} \cdot \vec{J} = \sum_{j=1}^n n_j J_j$$

(Drehung am Achse  $\vec{n}$  und Winkel  $\psi$ , vgl. Abschnitt 6.5), denn  $\vec{x}(t) := e^{-it\vec{n} \cdot \vec{J}} \vec{x}(0)$  erfüllt

$$\dot{\vec{x}} = (-i\vec{n} \cdot \vec{J}) \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_3 x_2 + n_2 x_3 \\ n_3 x_1 - n_1 x_3 \\ -n_2 x_1 + n_1 x_3 \end{pmatrix} = \vec{n} \times \vec{x},$$

d.h. Kreisbewegung / Drehung um Achse  $\vec{n}$ .



- Jede Darstellung einer Lie-Gruppe liefert (durch Ableiten) eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra (durch Matrizen).
- Eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  liefert (durch Exponentieren) eine Darstellung der Gruppe  $SO(3)$ , wenn die globalen (topologischen) Eigenschaften erfüllt werden.

Der Operator

$$J^2 := \sum_{j=1}^3 J_j^2$$

vertauscht mit allen Generatoren (und damit mit jedem  $X \in \mathfrak{so}(3)$ ):

$$\begin{aligned} [J^2, J_k] &= \sum_j [J_j^2, J_k] = \sum_j (J_j [J_j, J_k] + [J_j, J_k] J_j) \\ &= i \sum_{j,l} (J_j \varepsilon_{jkl} J_l + \underbrace{\varepsilon_{jkl} J_l J_j}_{=\varepsilon_{lkj} J_j J_l}) = i \sum_{j,l} \underbrace{(\varepsilon_{jkl} + \varepsilon_{jlk})}_{=0} J_j J_l = 0. \end{aligned}$$

$J^2$  ist kein Lie-Algebra-Element, sondern als sog. Casimir-Operator ein Element der einhüllenden Algebra (später).  $[\cdot, \cdot]$  ist der Kommutator.

- Daraus folgt weiter  $[J^2, g] = 0 \forall g \in \mathfrak{so}(3)$ , da  $g = e^{iX}$  mit  $X \in \mathfrak{so}(3)$ .
- Für Darstellungen muss das alles auch für die Darstellungsmatrizen von  $g$ ,  $X$ , und  $J^2$  gelten.
- Ist die Darstellung irreduzibel, so folgt aus dem 1. Schur'schen Lemma (Satz 4), dass die Darstellungsmatrix von  $J^2$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Sei nun eine Darstellung auf einen Vektorraum  $V$  gegeben (i.A. reduzibel).

**Verkürzte Notation:** Bezeichne die Darstellungsmatrizen von  $g$ ,  $X$ ,  $J^2$  auch mit  $g$ ,  $X$ ,  $J^2$ .

Konstruiere irreduzible Unterräume (und damit irreduzible Darstellungen) wie folgt:

- Wähle einen geeigneten Startvektor.
- Erzeuge eine irreduzible Basis durch wiederholte Anwendung der Generatoren.

Geeigneter Startvektor: Gemeinsamer Eigenvektor von  $J^2$  und  $J_3$  (möglich, da  $[J^2, J_3] = 0$ ), in Dirac-Notation

$$J_3 |m\rangle = m |jm\rangle$$

(Eigenwert von  $J^2$  nicht explizit angezeigt, da wir nun einen irreduziblen Unterraum konstruieren, d.h. in einem festen Eigenraum von  $J^2$  bleiben.)

Definiere

$$J_{\pm} := J_1 \pm iJ_2.$$

Dann gilt

$$[J_{\pm}, J_3] = [J_1 \pm iJ_2, J_3] = -iJ_2 \pm i(iJ_1) = \mp(J_1 \pm iJ_2) = \mp J_{\pm}$$

und damit

$$J_3(J_{\pm}|m\rangle) = (J_{\pm}J_3 - [J_{\pm}, J_3])|m\rangle = (J_{\pm}m \pm J_{\pm})|m\rangle = (m \pm 1)(J_{\pm}|m\rangle),$$

d.h. entweder  $J_{\pm}|m\rangle \propto |m \pm 1\rangle$  oder  $J_{\pm}|m\rangle = 0$ .

Da der invariante Unterraum endliche Dimension hat, muß die Serie oben und unten abbrechen, sagen wir oben bei  $m = j$  und unten bei  $m = \ell$ ,

$$\begin{aligned} J_3|j\rangle &= j|j\rangle, & J_3|\ell\rangle &= \ell|\ell\rangle, \\ J_+|j\rangle &= 0, & J_-|\ell\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} J_-J_+ &= (J_1 - iJ_2)(J_1 + iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 + i[J_1, J_2] \\ &= J_1^2 + J_2^2 - J_3 & \Rightarrow & \quad J^2 = J_3^2 + J_-J_+ + J_3 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} J_+J_- &= (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) = J_1^2 + J_2^2 - i[J_1, J_2] \\ &= J_1^2 + J_2^2 + J_3 & \Rightarrow & \quad J^2 = J_3^2 + J_+J_- - J_3. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} J^2|j\rangle &= (J_3^2 + J_3 + J_-J_+)|j\rangle = j(j+1)|j\rangle \\ J^2|\ell\rangle &= (J_3^2 - J_3 + J_+J_-)|\ell\rangle = \ell(\ell-1)|\ell\rangle \end{aligned}$$

Da alle Zustände in einem irreduziblen Unterraum denselben Eigenwert von  $J^2$  haben, folgt

$$j(j+1) = \ell(\ell-1).$$

Quadratische Gleichung, also 2 Lösungen:  $\ell = -j$  und  $\ell = j+1$ , aber laut Annahme ist  $j \geq \ell$ , d.h.

$$\ell = -j \quad \text{und} \quad j \geq 0.$$

Da wir in ganzzahligen Schritten von  $\ell = -j$  zu  $j$  kommen, gilt

$$j - (-j) = 2j \in \mathbb{N}$$

Also hat  $\mathfrak{so}(3)$  irreduzible Darstellungen mit  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

- Die Anzahl der Basisvektoren und damit die Dimension der Darstellung  $j$  ist  $2j+1$ .

- Für die orthonormalen Basisvektoren, nun bezeichnet durch  $|jm\rangle$  gilt

$$\begin{aligned} J^2|jm\rangle &= j(j+1)|jm\rangle \\ J_3|jm\rangle &= m|jm\rangle \\ J_\pm|jm\rangle &= [j(j+1) - m(m\pm 1)]^{1/2}|j, m\pm 1\rangle \end{aligned}$$

Bezeichne mit  $\Gamma^j(g)$  die *potentiellen* Darstellungen von  $\text{SO}(3)$  definiert durch

$$\Gamma^j(g)|jm\rangle = g|jm\rangle,$$

d.h. die Matrixelemente sind

$$\Gamma^j(g)_{mm'} = \langle jm|g|jm'\rangle.$$

speziell

$$\Gamma^j(e^{-itJ_3})_{mm'} = \langle jm|e^{-itJ_3}|jm'\rangle = \langle jm|e^{-itm'}|jm'\rangle = e^{-itm}\delta_{mm'}.$$

Es ist  $e^{-2\pi iJ_3} = I$ , aber  $\Gamma^j(e^{-2\pi iJ_3}) = e^{-2\pi im}\delta_{mm'}$ , d.h. nur für

$$m \in \mathbb{N}_0 \quad \Leftrightarrow \quad j \in \mathbb{N}_0$$

ist  $\Gamma^j(e^{-2\pi iJ_3}) = \mathbb{1}_{2j+1}$  und wir erhalten tatsächlich Darstellungen von  $\text{SO}(3)$ .

### Irreduzible Darstellungen von $\text{SU}(2)$

Die Pauli-Matrizen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (vgl. ÜA 33) bilden eine Basis der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(2)$  mit

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \sum_l \varepsilon_{jkl} \sigma_l,$$

d.h. die  $\sigma_k/2$  erfüllen dieselben Beziehungen wie die  $J_k$ , also gilt  $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ . Damit kennen also auch alle irreduziblen Darstellungen von  $\mathfrak{su}(2)$ . Da  $\text{SU}(2) = \exp(i\mathfrak{su}(2))$  (ÜA 34) und weil  $\text{SU}(2)$  einfach zusammenhängend ist, erhalten wir für alle  $j \in \mathbb{N}_0/2$  irreduzible Darstellungen von  $\text{SU}(2)$ .

Den letzten Schritt nochmal explizit: Laut ÜA 35 gilt für den Homomorphismus  $\varphi: \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  dass  $\varphi(e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\vec{\sigma}}) = R_{\vec{n}}(\alpha)$ , aber  $e^{-i\frac{\alpha}{2}\vec{n}\vec{\sigma}}$  ist erst für  $\alpha = 4\pi$  die Identität!  $\Gamma^j(e^{-4\pi i\frac{\sigma_3}{2}}) = \mathbb{1}_{2j+1}$  gilt aber auch für halbzahlige  $j$ .

### Charaktere

Da alle Drehungen um den gleichen Winkel in derselben Äquivalenzklasse sind, genügt es, Drehungen um  $\vec{e}_3$  zu betrachten:

$$\begin{aligned} \chi^j(\psi) &= \sum_{m=-j}^j \Gamma^j(R_{\vec{e}_3}(\psi))_{mm} = \sum_{m=-j}^j e^{-im\psi} && (\text{SO}(3), j \in \mathbb{N}_0, \psi \in [0, 2\pi)) \\ \chi^j(\alpha) &= \sum_{m=-j}^j \Gamma^j(e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_3})_{mm} = \sum_{m=-j}^j e^{-im\alpha} && (\text{SU}(2), j \in \mathbb{N}_0/2, \alpha \in [0, 4\pi)) \end{aligned}$$

Insbesondere für die *definierenden* (bzw. “fundamentalen”) Darstellungen

$$\chi^{1/2}(\alpha) = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \chi^1(\psi) = 1 + 2 \cos \psi.$$



## 6.9 Bemerkung zu einigen klassischen Lie-Gruppen

**Definition:** (Adjungierte Darstellung)

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , und sei  $g \in G$ . Die Abbildung  $\text{Ad} : g \mapsto \text{Ad}_g$  mit

$$\begin{aligned} \text{Ad}_g : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ X &\mapsto gXg^{-1} =: \text{Ad}_g(X) \end{aligned}$$

heißt adjungierte Darstellung von  $G$  (auf  $\mathfrak{g}$ ).

**Bemerkungen:**

1. Man definiert auch  $\text{Ad}_g(h) := ghg^{-1}$  für  $h \in G$ .
2.  $\text{Ad}$  ist eine Darstellung, denn
  - (i)  $\mathfrak{g}$  ist ein Vektorraum,
  - (ii)  $\text{Ad}_g(X) \in \mathfrak{g}$ , denn  $h(t) := ge^{iXt}g^{-1}$  ist eine Kurve in  $G$  mit  $h(0) = I$  und  $\dot{h}(0) = i\text{Ad}_g(X)$ , d.h. insbesondere

$$ge^{iXt}g^{-1} = e^{i\text{Ad}_g(X)},$$

$$\text{(iii) } \text{Ad}_g(\text{Ad}_h(X)) = \text{Ad}_g(hXh^{-1}) = ghXh^{-1}g^{-1} = \text{Ad}_{gh}(X)$$

3. Für  $X \in \mathfrak{g}$  definiert man weiter (vgl. ÜA 41)  $\text{ad}_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  durch

$$\text{ad}_X(Y) = \left. \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \text{Ad}_{e^{iXt}}(Y) \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (e^{iXt}Ye^{-iXt}) \right|_{t=0} = [X, Y].$$

**Lemma 20. (Hauptachsentransformation (HAT) für unitäre Matrizen)**

Sei  $g \in U(n)$ . Dann existiert ein  $h \in U(n)$ , so dass  $h^\dagger gh$  diagonal ist, d.h. insbesondere

$$g = h \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} h^\dagger$$

mit reellen  $\varphi_j$ .

**Beweis:** Führe zurück auf HAT für hermitesche Matrizen.

Sei  $M_\phi := \{g \in U(n) : e^{i\phi} \text{ ist kein Eigenwert von } g\}$ . Dann bildet

$$\begin{aligned} f_\phi : M_\phi &\rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} \\ g &\mapsto i(e^{i\phi} + g)(e^{i\phi} - g)^{-1} \end{aligned}$$

(verallgemeinerte *Cayley-Transformation*) unitäre  $g$  auf hermitesche Matrizen  $A := f(g)$  ab, denn

$$\begin{aligned}
A^\dagger &= (-i)(e^{-i\phi} - g^\dagger)^{-1}(e^{-i\phi} + g^\dagger) \\
&= (-i)\underbrace{(e^{i\phi} + g)(e^{i\phi} + g)^{-1}}_{=1}(e^{-i\phi} - g^\dagger)^{-1}(e^{-i\phi} + g^\dagger) \\
&= (-i)(e^{i\phi} + g)(\mathbb{1} - e^{i\phi}g^\dagger + e^{-i\phi}g - \mathbb{1})^{-1}(e^{-i\phi} + g^\dagger) \\
&= i(e^{i\phi} + g)\underbrace{(e^{i\phi}g^\dagger - e^{-i\phi}g)^{-1}}_{=:B}(e^{-i\phi} + g^\dagger)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
B(e^{i\phi} - g) &= (e^{i\phi}g^\dagger - e^{-i\phi}g)^{-1}(e^{-i\phi} + g^\dagger)(e^{i\phi} - g) \\
&= (e^{i\phi}g^\dagger - e^{-i\phi}g)^{-1}(\mathbb{1} + e^{i\phi}g^\dagger - e^{-i\phi}g - \mathbb{1}) = \mathbb{1},
\end{aligned}$$

d.h.  $A^\dagger = A$ . Damit existiert ein  $h \in U(n)$ , so dass  $h^\dagger Ah = D$  diagonal ist (HAT für hermitesche Matrizen). Weiter ist  $f_\phi$  bijektiv mit

$$\begin{aligned}
A &= i(e^{i\phi} + g)(e^{i\phi} - g)^{-1} \\
\Leftrightarrow A(e^{i\phi} - g) &= i(e^{i\phi} + g) \\
\Leftrightarrow e^{i\phi}(A - i) &= (A + i)g \\
\Leftrightarrow g &= e^{i\phi}(A + i)^{-1}(A - i) = f^{-1}(A).
\end{aligned}$$

Zu gegebenem  $g \in U(n)$  wähle nun  $\phi$  so, dass  $g \in M_\phi$ , nenne  $A := f_\phi(g)$ , und wähle  $h \in U(n)$  so, dass  $h^\dagger Ah =: D$  diagonal ist. Dann diagonalisiert  $h$  auch  $g$ , denn

$$h^\dagger gh = h^\dagger e^{i\phi}(A + i)^{-1} h h^\dagger (A - i) h = e^{i\phi}(D + i)^{-1}(D - i).$$

□

**Bemerkung:** Gilt analog für  $g \in SU(n) \subset U(n)$ , mit  $h \in SU(n)$ , denn falls  $\det h \neq 1$ , wähle stattdessen  $\tilde{h} = (\det h)^{-\frac{1}{n}} h$ .

**Satz 21.** Zu jedem  $g \in U(n)$  existiert ein  $X \in \mathfrak{u}(n)$ , so dass  $g = e^{iX}$ .

**Beweis:** Laut Lemma 20 existiert ein  $h \in U(n)$ , so dass

$$g = h \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} h^\dagger = h e^{iY} h^\dagger$$

mit

$$Y = \begin{pmatrix} \varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(n).$$

Weiter gilt

$$g = he^{iY}h^\dagger = e^{i\text{Ad}_h(Y)}$$

d.h. das gesuchte  $X \in \mathfrak{u}(n)$  ist  $X = \text{Ad}_h(Y)$ . □

**Bemerkungen:**

1. Mit der Bemerkung nach Lemma 20 gilt auch: Zu jedem  $g \in \text{SU}(n)$  existiert ein  $X \in \mathfrak{su}(n)$ , so dass  $g = e^{iX}$ .
2. Ähnliches gilt auch für  $g \in \text{SO}(2n)$ : Man zeigt zunächst, dass ein  $h \in \text{SO}(2n)$  existiert, so dass

$$g = h \begin{pmatrix} R_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_n \end{pmatrix} h^T$$

mit  $R_j \in \text{SO}(2)$ . Für  $\text{SO}(2n+1)$  hat die Diagonalmatrix noch eine zusätzliche Zeile mit einer 1. Damit lässt sich auch jedes  $g \in \text{SO}(n)$  als  $e^{iX}$  mit  $X \in \mathfrak{so}(n)$  schreiben.

3. Für all diese Gruppen, können wir also bei der Konstruktion irreduzibler Darstellungen vorgehen wie in Abschnitt 6.8 für  $\text{SO}(3)$  bzw.  $\text{SU}(2)$ : Konstruiere zunächst irreduzible Darstellungen für die Lie-Algebra und durch Exponentieren (potentielle) Darstellungen der Gruppe.
4. Die auftretenden Diagonalmatrizen sind maximale abelsche Untergruppen (sogenannte *maximale Tori*) der jeweiligen Gruppen.

## 6.10 Weitere Begriffe zu Lie-Algebren

Mit den Überlegungen aus Abschnitt 20 wissen wir, wann wir von Darstellungen der Lie-Algebra auf Darstellungen der Lie-Gruppe schließen können. Das war der letzte Schritt in der Vorgehensweise aus Abschnitt 6.8. Zuvor hatten wir bei der Konstruktion von Darstellungen der Lie-Algebra Eigenschaften von  $J^2$  verwendet. Im folgenden diskutieren wir nochmal allgemeiner, was in diesem ersten Schritt passiert ist, und erwähnen dabei einige Begriffe, auf die wir aber z.T. nicht näher eingehen werden.

**Definition:** (Darstellungen von Lie-Algebren)

Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra und  $V$  ein Vektorraum. Eine Darstellung  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{GL}(V)$  ordnet jedem  $X \in \mathfrak{g}$  eine lineare Abbildung  $\phi(X) : V \rightarrow V$  zu, so dass

$$\underbrace{\phi([X, Y])}_{\text{Lie-Klammer}} = \underbrace{[\phi(X), \phi(Y)]}_{\text{Kommutator}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

**Beispiele:**

1. Durch  $\text{ad} : \mathfrak{g} \ni X \mapsto \text{ad}_X$  mit  $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$  wir eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf  $\mathfrak{g}$

definiert, denn

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ad}_X(\operatorname{ad}_Y(Z)) - \operatorname{ad}_Y(\operatorname{ad}_X(Z)) &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\
 &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\
 &\stackrel{\text{Jacobi-Id.}}{=} -[Z, [X, Y]] \\
 &= [[X, Y], Z] \\
 &= \operatorname{ad}_{[X, Y]}(Z) \quad \forall Z \in \mathfrak{g}.
 \end{aligned}$$

In einer Basis  $\{X_j\}$  von  $\mathfrak{g}$  sind die Matrixelemente der Darstellungsmatrizen durch die Strukturkonstanten gegeben:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ad}_{X_j}(X_k) &=: i \sum_l X_l (\operatorname{ad}_{X_j})_{lk} \\
 &= [X_j, X_k] = i \sum_l c_{jk}^l X_l.
 \end{aligned}$$

2. Aus einer Darstellung  $\Gamma$  einer Lie-Gruppe erhält man (durch Ableiten) eine Darstellung  $d\Gamma$  der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , wobei

$$d\Gamma(X) = \left. \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \Gamma(e^{iXt}) \right|_{t=0}.$$

In diesem Abschnitt ist die Konvention mit dem  $i$  in der Exponentialabbildung weniger geschickt. . .

**Definition:** (Einhüllende Algebra)

Sei  $\mathfrak{g}$  eine Lie-Algebra mit Basis  $\{X_j\}$ . Die einhüllende Algebra  $E(\mathfrak{g})$  besteht aus formalen Polynomen in den Generatoren,

$$\sum_j a_j (iX_j) + \sum_{jk} b_{jk} (iX_j)(iX_k) + \sum_{jkl} c_{jkl} (iX_j)(iX_k)(iX_l) + \dots, \quad a_j, b_{jk}, c_{jkl} \in \mathbb{R},$$

wobei  $iX_j iX_k$  und  $iX_k iX_j + iX_l$  identifiziert werden, falls  $[iX_j, iX_k] = iX_l$ .

**Bemerkungen:**

1. Eine Darstellungen  $\phi$  einer Lie-Algebra liefert dann auch eine Darstellung der einhüllenden Algebra (nenne auch  $\phi$ ), wobei die formalen Produkte und Summen zu Matrix-Produkten und Matrix-Summen werden.
2. Eine Basis der einhüllenden Algebra bilden z.B. diejenigen Monome der Generatoren, bei den die Indizes von links nach rechts aufsteigend angeordnet sind – alle anderen lassen sich durch Ausnutzen der Lie-Klammer als Linearkombinationen darstellen. Beispiele für  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 \sigma_1 &= \sigma_1 \sigma_2 - [\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1 \sigma_2 - 2i\sigma_3 \\
 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 &= \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3 - [\sigma_2, \sigma_3]) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 2i\sigma_1 \sigma_1
 \end{aligned}$$

**Definition:** (Casimir-Operator)

Ein  $C \in E(\mathfrak{g})$  heißt Casimir-Operator, falls  $C$  mit allen Elementen der einhüllenden Algebra vertauscht, d.h. falls

$$[C, A] = 0 \quad \forall A \in E(\mathfrak{g}).$$

**Beispiel:**  $J^2 := J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$  für  $SO(3)$  (vgl. Abschnitt 6.8).

**Bemerkungen:**

1. Ein Casimir-Operator vertauscht insbesondere mit allen  $X \in \mathfrak{g} \subseteq E(\mathfrak{g})$ .
2. Damit folgt auch  $[C, e^{iX}] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$ , d.h. für die Fälle aus Abschnitt 6.8 und 6.9, wo galt  $G = \exp(i\mathfrak{g})$ , folgt sofort, dass  $[C, g] = 0 \quad \forall g \in G$ .
3.  $[C, g] = 0 \quad \forall g \in G$  gilt sogar allgemein, denn man kann zeigen:
  - $\exp(i\mathfrak{g})$  enthält immer eine Umgebung der Identität in  $G$ .
  - Durch (endliche) Produkte  $e^{iX}e^{iY}e^{iZ} \dots$  erreicht man alle  $g \in G_0$ , der Zusammenhangskomponente der Identität.
  - Da  $G/G_0$  total unzusammenhängend ist (Abschnitt 6.1), vertauscht auch jedes  $h \in G/G_0$  mit allen  $g \in G$  (ÜA 37) und damit mit allen  $X \in \mathfrak{g}$  und allen  $A \in E(\mathfrak{g})$ .
4. Für Darstellungen (der Lie-Gruppe, der Lie-Algebra und der einhüllenden Algebra) gilt damit  $[d\Gamma(C), \Gamma(g)] = 0 \quad \forall g \in G$ , und mit dem 1. Schur'schen Lemma folgt für irreduzible Darstellungen, dass  $d\Gamma(C)$  ein Vielfaches von  $\mathbf{1}$  ist.

Einen Casimir-Operator findet man wie folgt...

**Definition:** (Killing-Form)

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , und sei  $\text{ad}$  die adjungierte Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto K(X, Y) := \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y) \end{aligned}$$

heißt Killing-Form (vgl. ÜA 34).

**Bemerkungen:**

1.  $K$  ist bilinear da  $\text{ad}$  und  $\text{tr}$  linear sind.
2.  $K$  ist symmetrisch, da unter der Spur zyklisch vertauscht werden darf, z.B. gilt mit einer Basis  $\{X_j\}$

$$(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)(X_j) = \text{ad}_X \left( \sum_k X_k (\text{ad}_Y)_{kj} \right) = \sum_{kl} X_l (\text{ad}_X)_{lk} (\text{ad}_Y)_{kj}$$

und damit

$$\text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y) = \sum_{jk} (\text{ad}_X)_{jk} (\text{ad}_Y)_{kj} = \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y).$$

Hier wurde nur die Linearität von  $\text{ad}_X$  benutzt.

3. Es gilt  $K(\text{Ad}_g(X), \text{Ad}_g(Y)) = K(X, Y) \forall X, Y \in \mathfrak{g}$  und  $\forall g \in G$ , denn mit

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\text{Ad}_g(X)}(Z) &= [gXg^{-1}, Z] \\ &= gXg^{-1}Z - ZgXg^{-1} \\ &= g(Xg^{-1}Zg - g^{-1}ZgX)g^{-1} \\ &= g[X, g^{-1}Zg]g^{-1} \\ &= \text{Ad}_g \circ \text{ad}_X \circ \text{Ad}_{g^{-1}} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} K(\text{Ad}_g(X), \text{Ad}_g(Y)) &= \text{tr}(\text{ad}_{\text{Ad}_g(X)} \circ \text{ad}_{\text{Ad}_g(Y)}) \\ &= \text{tr}(\text{Ad}_g \circ \text{ad}_X \circ \underbrace{\text{Ad}_{g^{-1}} \circ \text{Ad}_g}_{\text{id}} \circ \text{ad}_Y \circ \text{Ad}_{g^{-1}}) \\ &= \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y) \\ &= K(X, Y) \end{aligned}$$

(zyklisches Vertauschen unter der Spur).

4. Für halbeinfache Lie-Gruppen (haben wir nicht definiert, aber die klassischen Gruppen  $\text{SU}(n)$  und  $\text{SO}(n)$  gehören dazu) ist  $K$  positiv definit, definiert also ein Skalarprodukt. Wähle in diesem Fall eine Orthonormalbasis  $\{X_j\}$  bezüglich  $K$ , d.h.

$$K(X_j, X_k) = \delta_{jk}.$$

**Behauptung:** (Quadratischer Casimir-Operator)

Dann ist  $C_2 := \sum_j X_j X_j$  immer ein Casimir-Operator.

**Beweis:**

(i) Zunächst:  $C_2$  ist unabhängig von der Wahl der ON-Basis, denn sind  $\{X_j\}$  und  $\{Y_j\}$  ON-Basen, so existiert ein  $S$  mit

$$Y_j = \sum_k X_k S_{kj},$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \delta_{jk} &= K(Y_j, Y_k) = \sum_{lm} \underbrace{K(X_l, X_m)}_{\delta_{lm}} S_{lj} S_{mk} = \sum_l S_{lj} S_{lk} \\ \Leftrightarrow S_{lj} &= (S^{-1})_{jl} \quad (\Leftrightarrow S \text{ ist orthogonal}). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\sum_j Y_j Y_j = \sum_{jkl} X_k X_l S_{kj} S_{lj} = \sum_{jkl} X_k X_l S_{kj} (S^{-1})_{jl} = \sum_{kl} X_k X_l \delta_{kl} = \sum_k X_k X_k.$$

(ii)  $C_2$  ist Casimir-Operator  $\Leftrightarrow [C_2, X] = 0 \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \text{Ad}_g(C_2) = C_2 \forall g \in G$ .  
Berechne also

$$\text{Ad}_g(C_2) = g \sum_j X_j g^{-1} g X_j g^{-1} = \sum_j \text{Ad}_g(X_j) \underbrace{\text{Ad}_g(X_j)}_{=: Y_j} = \sum_j Y_j Y_j = C_2,$$

denn  $\{Y_j = \text{Ad}_g(X_j)\}$  ist eine ON-Basis, da

$$K(Y_j, Y_k) = K(\text{Ad}_g(X_j), \text{Ad}_g(X_k)) = K(X_j, X_k) = \delta_{jk}.$$

□

## 7 Die Tensormethode zur Konstruktion irreduzibler Darstellungen von $GL(m)$ und Untergruppen

### Kurzversion der Abschnitte 7.1 und 7.2

Sei  $V$  im Folgenden stets ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$  mit  $\dim V = m$ .

Definiere den Tensorraum  $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ Faktoren}}$ .

Bilde Tensorprodukte aus  $|v_j\rangle \in V, j = 1, \dots, n$ :

$$|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \cdots \otimes |v_n\rangle \in V^{\otimes n}.$$

Allgemeine  $|v\rangle \in V^{\otimes n}$  sind Linearkombinationen solcher Tensorprodukte und heißen *Tensoren  $n$ -ter Stufe*.

- Darstellung von  $GL(m)$  auf  $V^{\otimes n}$ : Definierende Darstellung auf jedem Faktor,  $g \in GL(m)$ ,

$$g(|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \cdots \otimes |v_n\rangle) = (g|v_1\rangle) \otimes (g|v_2\rangle) \otimes \cdots \otimes (g|v_n\rangle),$$

setze durch Linearität auf ganz  $V^{\otimes n}$  fort.

- Darstellung von  $S_n$  auf  $V^{\otimes n}$ :  $p \in S_n$ ,

$$p(|v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \cdots \otimes |v_n\rangle) = |v_{p^{-1}(1)}\rangle \otimes |v_{p^{-1}(2)}\rangle \otimes \cdots \otimes |v_{p^{-1}(n)}\rangle,$$

setze ebenfalls durch Linearität auf ganz  $V^{\otimes n}$  fort.

Offensichtlich gilt:

$$gp|v\rangle = pg|v\rangle \quad \forall p \in S_n, \forall g \in GL(m) \text{ und } \forall |v\rangle \in V^{\otimes n}$$

(z.B. durch Hinschreiben für Tensorprodukte).

In einer Basis... Wähle eine Basis von  $V$ :  $|j\rangle, j = 1, \dots, m$ .

Bilde eine Produktbasis von  $V^{\otimes n}$ :

$$|j_1\rangle \otimes \cdots \otimes |j_n\rangle =: |j_1 \dots j_n\rangle, \quad j_k = 1, \dots, m \quad (k = 1, \dots, n).$$

Allgemeines Element  $|x\rangle \in V^{\otimes n}$ :

$$|x\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m x_{j_1 \dots j_n} |j_1 \dots j_n\rangle \stackrel{\text{Summationskonvention}}{=} x_{j_1 \dots j_n} |j_1 \dots j_n\rangle,$$

z.B. mit  $p \in S_n$

$$\begin{aligned} p|x\rangle &= x_{j_1 \dots j_n} |j_{p^{-1}(1)} \dots j_{p^{-1}(n)}\rangle \\ &= x_{j_{p(1)} \dots j_{p(n)}} |j_1 \dots j_n\rangle. \end{aligned}$$

In den folgenden beiden Abschnitten wird noch einiges explizit in Produktbasen gerechnet...



## 7.1 Tensoren und Tensorräume

- sei  $V_m$  ein  $m$ -dim. Vektorraum und  $\{g\}$  die Menge invertierbarer linearer Transformationen auf  $V_m$   
die Transformationen  $g$  bilden eine Gruppe isomorph zu  $GL(m, \mathbb{C})$  (im folgenden abgekürzt  $GL(m)$ )

- sei  $\{|i\rangle; i = 1, \dots, m\}$  eine Basis von  $V_m$   
dann ist eine Matrixdarstellung von  $GL(m)$  gegeben durch

$$g|i\rangle = |j\rangle g_{ji} \quad (\text{Summe über } j)$$

mit  $\det g_{ji} \neq 0$

das ist die sog. definierende oder fundamentale Darstellung von  $GL(m)$   
diese ist irreduzibel und wird im folgenden auch mit  $g$  bezeichnet

- der Produktraum  $V^{\otimes n} \equiv V_m \otimes \dots \otimes V_m$  (mit  $n$  Faktoren von  $V_m$ ) heißt Tensorraum
- eine Basis für  $V^{\otimes n}$  ist gegeben durch

$$|i_1 \dots i_n\rangle \equiv |i_1\rangle \otimes \dots \otimes |i_n\rangle$$

abgekürzt:  $|i\rangle_n$

- ein beliebiges Element  $x \in V^{\otimes n}$  kann geschrieben werden als

$$|x\rangle = |i_1 \dots i_n\rangle x_{i_1 \dots i_n}$$

abgekürzt:  $|x\rangle = |i\rangle_n x_{\{i\}}$

die  $x_{\{i\}}$  heißen Tensorkomponenten von  $|x\rangle$

- die Elemente von  $GL(m)$  induzieren folgende Transformationen auf  $V^{\otimes n}$ :

$$g|i\rangle_n = |j\rangle_n D(g)_{\{j\}\{i\}}$$

$$\text{mit } D(g)_{\{j\}\{i\}} = g_{j_1 i_1} \dots g_{j_n i_n}$$

die  $D(g)$  bilden eine  $m^n$ -dimensionale Darstellung von  $GL(m)$ , die Produktdarstellung  $g \otimes \dots \otimes g$ , mit Trägerraum  $V^{\otimes n}$

- die  $|x\rangle \in V^{\otimes n}$  transformieren sich unter  $GL(m)$  wie folgt:

$$\begin{aligned} |x^g\rangle &\equiv g|x\rangle = (g|i\rangle_n) x_{\{i\}} = |j\rangle_n D(g)_{\{j\}\{i\}} x_{\{i\}} \stackrel{!}{=} |j\rangle_n x_{\{j\}}^g \\ &\rightarrow x_{\{j\}}^g = D(g)_{\{j\}\{i\}} x_{\{i\}} \end{aligned}$$

Objekte, die sich wie die  $|x\rangle$  transformieren, heißen Tensoren  $n$ -ter Stufe bezüglich  $GL(m)$

insbesondere sind Vektoren Tensoren erster Stufe

- wenn wir die Operatoren bzw. Matrizen  $g$  auf die Untergruppen  $U(m)$ ,  $SU(m)$  oder  $O(m)$  einschränken, können wir Tensoren bezüglich dieser Gruppen definieren

## 7.2 Wirkung der symmetrischen Gruppe auf dem Tensorraum

- betrachte eine Permutation  $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \in S_n$  und ordne ihr eine lineare Transformation auf  $V^{\otimes n}$  zu:

$$|x^p\rangle \equiv p|x\rangle = |i_1 \cdots i_n\rangle x_{i_1 \cdots i_n}^p$$

mit  $x_{i_1 \cdots i_n}^p \equiv x_{i_{p_1} \cdots i_{p_n}}$

hier wirkt  $p$  nur auf die Tensorkomponenten  $x_{\{i\}}$  und nicht auf die Basistensoren  $|i\rangle_n$

- andererseits kann man  $p$  auch auf die Basistensoren wirken lassen (und nicht auf die Tensorkomponenten) wegen

$$|x^p\rangle = |i_1 \cdots i_n\rangle x_{i_{p_1} \cdots i_{p_n}} = |i_{p_1^{-1}} \cdots i_{p_n^{-1}}\rangle x_{i_1 \cdots i_n}$$

ist die Wirkung von  $p$  auf die Basistensoren gegeben durch

$$p|i_1 \cdots i_n\rangle = |i_{p_1^{-1}} \cdots i_{p_n^{-1}}\rangle = |i^{p^{-1}}\rangle_n$$

daher gilt

$$p|i\rangle_n = |j\rangle_n \Gamma(p)_{\{j\}\{i\}}$$

mit  $\Gamma(p)_{\{j\}\{i\}} = \delta_{j_1 i_{p_1^{-1}}} \cdots \delta_{j_n i_{p_n^{-1}}} = \delta_{j_{p_1} i_1} \cdots \delta_{j_{p_n} i_n}$

- Bsp.:  $m = 2, n = 3, p = (123)$  und

$$|x\rangle = |111\rangle + 3|112\rangle + 4|122\rangle + 2|211\rangle + 5|212\rangle + 4|221\rangle$$

d.h. wir haben

$$\begin{aligned} x_{111} &= 1, & x_{112} &= 3, & x_{121} &= 0, & x_{122} &= 4 \\ x_{211} &= 2, & x_{212} &= 5, & x_{221} &= 4, & x_{222} &= 0 \end{aligned}$$

- Mögl. 1: Wirkung auf die Tensorkomponenten

$$x_{i_1 i_2 i_3}^{(123)} = x_{i_2 i_3 i_1}, \text{ d.h.}$$

$$\begin{aligned} x_{111}^{(123)} &= 1, & x_{112}^{(123)} &= 0, & x_{121}^{(123)} &= 2, & x_{122}^{(123)} &= 4 \\ x_{211}^{(123)} &= 3, & x_{212}^{(123)} &= 4, & x_{221}^{(123)} &= 5, & x_{222}^{(123)} &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$|x^{(123)}\rangle = |111\rangle + 2|121\rangle + 4|122\rangle + 3|211\rangle + 4|212\rangle + 5|221\rangle$$

- Mögl. 2: Wirkung auf die Basistensoren  
 $p^{-1} = (321) \rightarrow p|i_1 i_2 i_3\rangle = |i_3 i_1 i_2\rangle$ , d.h.

$$\begin{aligned} p|111\rangle &= |111\rangle, & p|112\rangle &= |211\rangle, & p|121\rangle &= |112\rangle, & p|122\rangle &= |212\rangle \\ p|211\rangle &= |121\rangle, & p|212\rangle &= |221\rangle, & p|221\rangle &= |122\rangle, & p|222\rangle &= |222\rangle \end{aligned}$$

und damit

$$|x^{(123)}\rangle = |111\rangle + 3|211\rangle + 4|212\rangle + 2|121\rangle + 5|221\rangle + 4|122\rangle \quad \checkmark$$

- wichtiger Punkt Nr. 1 (*s. Tung Lemma 5.1*): die Darstellungsmatrizen  $D(g)$  und  $\Gamma(p)$  haben folgende Symmetrie:

für  $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \in S_n$  und  $\{i^q\} = (i_{q_1} \cdots i_{q_n})$  gilt

$$D_{\{j\}\{i\}} = D_{\{j^q\}\{i^q\}}$$

d.h. die Matrizen sind invariant, wenn dieselbe Permutation gleichzeitig auf die Indizes von  $i$  und  $j$  angewandt wird (es ändert sich lediglich die Reihenfolge der Faktoren von  $g$  in  $D(g)$  bzw. der Kroneckerdeltas in  $\Gamma(p)$ )

- wichtiger Punkt Nr. 2: die Matrizen  $D(g)$  ( $g \in GL(m)$ ) und  $\Gamma(p)$  ( $p \in S_n$ ) kommutieren miteinander, d.h.

$$pg|i\rangle_n = gp|i\rangle_n$$

(Beweis in Übungen)

- sowohl die Darstellung  $D(g)$  von  $GL(m)$  als auch die Darstellung  $\Gamma(p)$  von  $S_n$  auf  $V^{\otimes n}$  ist i.A. reduzibel
  - aus Kap. 5 wissen wir bereits, wie wir  $\Gamma(p)$  in irred. Komponenten zerlegen können, nämlich durch Anwendung der irred. Symmetrisierer der Algebra  $\mathcal{A}(S_n)$
  - im Folgenden werden wir sehen, dass dieser Prozeß auch zur Reduzierung von  $D(g)$  führt
  - *der tiefe Grund dafür ist, dass die  $GL(m)$  und  $S_n$  Transformationen auf  $V^{\otimes n}$  miteinander kommutieren und dass dies die “maximalen” Gruppen sind, die diese Eigenschaft haben*

## 7.3 Zerlegung des Tensorraums in irreduzible Unterräume bezüglich $S_n$ bzw. $GL(m)$

### 7.3.1 Symmetrieklassen im Tensorraum

- **Notation:** Sei (wie in Kapitel 5)
  - $\Theta_\lambda^p$  ein Young-Tableau
  - $e_\lambda^p$  der dazugehörige Young-Operator
  - $L_\lambda = \{re_\lambda; r \in \mathcal{A}(S_n)\}$  das von  $e_\lambda$  erzeugte irred. Linksideal (vgl. Abschnitt 5.4:  $e_\lambda = e_\lambda^I$ . Die anderen  $e_\lambda^p$  erzeugen auch minimale Linksideale, und die entsprechenden irreduziblen Darstellungen für festes  $\lambda$  sind äquivalent.)

- **Ziel:** Im Folgenden werden wir sehen:

- Ein Unterraum der Form

$$\text{span}(r|\alpha\rangle) \quad \text{für festes } |\alpha\rangle \in V^{\otimes n} \text{ und beliebiges } r \in L_\lambda$$

ist invariant und irreduzibel unter  $S_n$ .

- Ein Unterraum der Form

$$\text{span}(e_\lambda^p|\alpha\rangle) \quad \text{für festes } e_\lambda^p \text{ und beliebiges } |\alpha\rangle \in V^{\otimes n}$$

ist invariant und irreduzibel unter  $GL(m)$ .

- Der Tensorraum  $V^{\otimes n}$  kann so zerlegt werden, dass die Basistensoren die Form  $|\lambda, \alpha, a\rangle$  haben, mit
  - $\lambda =$  Symmetrieklasse, gegeben durch das Young-Diagramm,
  - $\alpha =$  Index für die versch. irred. inv. Unterräume bzgl.  $S_n$ ,
  - $a =$  Index für die versch. irred. inv. Unterräume bzgl.  $GL(m)$ .
- Für ein gegebenes Young-Tableau heißen die  $\{e_\lambda^p|\alpha\rangle : |\alpha\rangle \in V^{\otimes n}\}$  *Tensoren der Symmetrie*  $\Theta_\lambda^p$ .
- Für ein gegebenes Young-Diagramm heißen die  $\{re_\lambda|\alpha\rangle : r \in \mathcal{A}(S_n), |\alpha\rangle \in V^{\otimes n}\}$  *Tensoren der Symmetrieklasse*  $\lambda$ .
- Betrachte zunächst einen Unterraum  $T_\lambda(\alpha) = \{re_\lambda|\alpha\rangle; r \in \mathcal{A}(S_n)\}$  für festes  $\alpha$ . Dann ist  $T_\lambda(\alpha)$  entweder leer oder
  - $T_\lambda(\alpha)$  ist invariant und irreduzibel unter  $S_n$  und
  - die Darstellung von  $S_n$  auf  $T_\lambda(\alpha)$  ist gegeben durch die irreduzible Darstellung, die von  $e_\lambda$  auf  $L_\lambda$  erzeugt wird.

**Beweis:**

(i) Sei  $|x\rangle \in T_\lambda(\alpha)$ , dann existiert ein  $r \in \mathcal{A}(S_n)$  so dass

$$\begin{aligned} |x\rangle &= r e_\lambda |\alpha\rangle \\ \Rightarrow p|x\rangle &= \underbrace{pr}_{\in \mathcal{A}(S_n)} e_\lambda |\alpha\rangle \in T_\lambda(\alpha) \quad \forall p \in S_n. \end{aligned}$$

$\Rightarrow T_\lambda(\alpha)$  ist invariant unter  $S_n$ . (“irreduzibel” folgt gleich aus (ii))

(ii) Sei  $\{r_i e_\lambda\}$  eine Basis von  $L_\lambda \Rightarrow \{r_i e_\lambda |\alpha\rangle\}$  ist eine Basis von  $T_\lambda(\alpha)$ .

a) Wirkung von  $S_n$  auf  $L_\lambda$ :  $p \in S_n$ ,

$$p r_i e_\lambda = r_j e_\lambda \Gamma^\lambda(p)_{ji}.$$

b) Wirkung von  $S_n$  auf  $T_\lambda(\alpha)$ :  $p \in S_n$ ,

$$p r_i e_\lambda |\alpha\rangle = r_j e_\lambda \Gamma^\lambda(p)_{ji} |\alpha\rangle = r_j e_\lambda |\alpha\rangle \Gamma^\lambda(p)_{ji}.$$

$\Rightarrow$  Die Darstellungsmatrizen auf  $T_\lambda(\alpha)$  sind dieselben wie auf  $L_\lambda$ , und insbesondere ist  $T_\lambda(\alpha)$  irreduzibel.

### 7.3.2 Total symmetrische und total antisymmetrische Tensoren

- Sei  $\Theta_{\lambda=s} = \boxed{\quad} \boxed{\quad} \cdots \boxed{\quad}$ , d.h.  $e_s = s$  ist der totale Symmetrisierer von  $S_n$ ,  $L_s$  ist eindimensional.

$\Rightarrow$  Für gegebenes  $|\alpha\rangle$  ist  $T_s(\alpha)$  eindimensional =  $\text{span}(e_s |\alpha\rangle)$ .

Solche Tensoren sind *total symmetrisch* (in allen Indizes).

Jedes  $T_\lambda(\alpha)$  trägt die triviale Darstellung.

**Beispiel:**  $m = 2, n = 3 \Rightarrow e_s = \frac{1}{6}[I + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)]$

Hier gibt es 4 verschiedene total symmetrische Tensoren:

$$\begin{aligned} e_s |111\rangle &= |111\rangle & & =: |s, 1, 1\rangle \\ e_s |112\rangle &= \frac{1}{3}(|112\rangle + |121\rangle + |211\rangle) & & =: |s, 2, 1\rangle \\ e_s |122\rangle &= \frac{1}{3}(|122\rangle + |212\rangle + |221\rangle) & & =: |s, 3, 1\rangle \\ e_s |222\rangle &= |222\rangle & & =: |s, 4, 1\rangle \end{aligned}$$

Den Raum, der von den Tensoren der Symmetrieklasse  $s$  aufgespannt wird, nennen wir  $T'_s$ .

- Total antisymmetrische Tensoren ( $\lambda = a$ ) gibt es nur für  $n \leq m$ , also nur bis zur Stufe  $m$ ,

$$\Theta_{\lambda=a} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \vdots \\ \hline \square \\ \hline \end{array},$$

denn für  $n > m$  enthält jeder Basisvektor mindestens zwei gleiche Indizes, sagen wir  $j_k = j_l$  in  $|j_1 \dots j_n\rangle \Rightarrow$  durch Antisymmetrisieren ergibt sich Null.

Die Darstellung von  $S_n$  auf  $T_a(\alpha)$  ist sgn.

- **Beispiel:** Tensoren 2. Stufe ( $n = 2$ ) in  $m$  Dimensionen

$$\begin{aligned} e_s |ii\rangle &= |ii\rangle & i &= 1, \dots, m \\ e_s |ij\rangle &= \frac{1}{2}(|ij\rangle + |ji\rangle) & i &\neq j \quad (i = 1, \dots, n, j = i + 1, \dots, n) \end{aligned}$$

$\Rightarrow m + \frac{1}{2}(m^2 - m) = \frac{1}{2}(m^2 + m)$  total symmetrische Tensoren.

$$\begin{aligned} e_a |ii\rangle &= 0 & i &= 1, \dots, m \\ e_a |ij\rangle &= \frac{1}{2}(|ij\rangle - |ji\rangle) & i &\neq j \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(m^2 - m)$  total antisymmetrische Tensoren (*einer* für  $m = 2$ ).

### 7.3.3 Tensoren mit gemischter Symmetrie

Betrachte wieder das Beispiel von Tensoren 3. Stufe ( $n = 3$ ) in  $m = 2$  Dimensionen und speziell

$$\Theta_{\lambda=\kappa} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \text{mit} \quad e_\kappa = [I + (12)][I - (13)]$$

(hier ist  $p = I$ , nicht mitgeschrieben, also  $\Theta_\kappa = \Theta_\kappa^I$ )  
Aus Abschnitt 5.3 wissen wir:  $L_\kappa = \text{span}(e_\kappa, (23)e_\kappa)$

- Wähle zunächst  $|\alpha\rangle = |112\rangle$

$$\begin{aligned} e_\kappa |112\rangle &= [e + (12)][|112\rangle - |211\rangle] \\ &= 2|112\rangle - |211\rangle - |121\rangle \quad =: |\kappa, 1, 1\rangle \\ (23)e_\kappa |112\rangle &= (23)[2|112\rangle - |211\rangle - |121\rangle] \\ &= 2|121\rangle - |211\rangle - |112\rangle \quad =: |\kappa, 1, 2\rangle \end{aligned}$$

Für alle  $r \in \mathcal{A}(S_n)$  ist  $re_\kappa|\alpha\rangle$  eine Linearkombination dieser beiden Tensoren.

$\Rightarrow$  Diese beiden gemischten Tensoren bilden eine Basis für einen 2-dimensionalen.

Unterraum  $T_\kappa(1)$ , der invariant und irreduzibel unter  $S_3$  ist (vgl. Abschnitt 5.3)

- Wähle nun  $|\alpha\rangle = |221\rangle$

$$\begin{aligned} e_\kappa|221\rangle &= 2|221\rangle - |122\rangle - |212\rangle] =: |\kappa, 2, 1\rangle \\ (23)e_\kappa|112\rangle &= 2|212\rangle - |122\rangle - |221\rangle] =: |\kappa, 2, 2\rangle \end{aligned}$$

Dies ist eine Basis für einen weiteren 2-dimensionalen, irreduziblen, invarianten Unterraum  $T_\kappa(2)$ .

- $|\kappa, 1, 1\rangle$  und  $|\kappa, 2, 1\rangle$  sind Tensoren der Symmetrie  $\Theta_\kappa$  und spannen den 2-dimensionalen Unterraum  $T'_\kappa(1) := \{e_\kappa|\alpha\rangle : |\alpha\rangle \in V^{\otimes 3}\}$  auf.

(i)  $T'_\kappa(1)$  ist invariant unter  $GL(2)$ , denn aus  $gp = pg \forall g \in GL(2)$  und  $\forall p \in S_n$

$$\Rightarrow \quad ge_\kappa|\alpha\rangle = e_\kappa \underbrace{g|\alpha\rangle}_{\in V^{\otimes 3}} \in T'_\kappa(1).$$

Dieses Argument hat weder  $n = 3$  noch  $m = 2$  verwendet, gilt also allgemein.

(ii)  $T'_\kappa(1)$  ist irreduzibel unter  $GL(2)$ .

**Beweis:** Wir konstruieren explizit die Darstellungsmatrizen für  $g \in GL(2)$ .

$$\begin{aligned} g|\kappa, 1, 1\rangle &= g(2|112\rangle - |211\rangle - |121\rangle) \\ &\text{es war } g|112\rangle = |ijk\rangle g_{i1}g_{j1}g_{k2} \text{ (Summe über } i, j, k) \\ &= 2|ijk\rangle g_{i1}g_{j1}g_{k2} - |ijk\rangle g_{i2}g_{j1}g_{k1} - |ijk\rangle g_{i1}g_{j2}g_{k1} \\ &3 \times 8 = 24 \text{ Terme} \\ &= |112\rangle \underbrace{(2g_{11}g_{11}g_{22} - g_{12}g_{11}g_{21} - g_{11}g_{12}g_{21})}_{=2g_{11} \det g} \\ &+ |211\rangle \underbrace{(2g_{21}g_{11}g_{12} - g_{22}g_{11}g_{11} - g_{21}g_{12}g_{11})}_{=-g_{11} \det g} \\ &+ |121\rangle \underbrace{(2g_{11}g_{21}g_{12} - g_{12}g_{21}g_{11} - g_{11}g_{22}g_{11})}_{=-g_{11} \det g} \\ &+ |221\rangle \underbrace{(2g_{21}g_{21}g_{12} - g_{22}g_{21}g_{11} - g_{21}g_{22}g_{11})}_{=-2g_{21} \det g} \\ &+ |122\rangle \underbrace{(2g_{11}g_{21}g_{22} - g_{12}g_{21}g_{21} - g_{11}g_{22}g_{21})}_{=g_{21} \det g} \\ &+ |212\rangle \underbrace{(2g_{21}g_{11}g_{22} - g_{22}g_{11}g_{21} - g_{21}g_{12}g_{21})}_{=g_{21} \det g} \end{aligned}$$

Die restliche Terme müssen Null ergeben, da  $T'_\kappa(1)$  invariant unter  $GL(m)$  ist.

$$= \det g (|\kappa, 1, 1\rangle g_{11} + |\kappa, 2, 1\rangle (-g_{21}))$$

Analog findet man

$$g|\kappa, 2, 1\rangle = \det g (|\kappa, 1, 1\rangle (-g_{12}) + |\kappa, 2, 1\rangle g_{22}),$$

d.h. die Darstellungsmatrizen,

$$D^\kappa(g) = \det g \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{21} \\ -g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

sind selbst  $\in \text{GL}(2)$  und jede  $\text{GL}(2)$ -Matrix tritt auch als  $D^\kappa(g)$  auf. Falls die Darstellung reduzibel wäre, müssten alle  $D(g)$  einen gemeinsamen Eigenvektor haben – offensichtlich nicht der Fall, also ist die Darstellung irreduzibel.  $\square$

- Analog findet man:  $|\kappa, 1, 2\rangle$  und  $|\kappa, 2, 2\rangle$  sind Tensoren der Symmetrie  $\Theta_\kappa^{(23)}$  und spannen den 2-dimensionalen Raum  $T'_\kappa(2) := \{e_\kappa^{(23)}|\alpha\rangle : |\alpha\rangle \in V^{\otimes 3}\}$  auf.  $T'_\kappa(2)$  ist auch invariant und irreduzibel unter  $\text{GL}(2)$  und trägt die gleiche Darstellung von  $\text{GL}(2)$  wie  $T'_\kappa(1)$ .

- Die Räume  $T'_\kappa(a)$  ( $a = 1, 2$ ) enthalten alle Tensoren der Symmetrieklasse  $\kappa = \boxplus$ .
- Der 8-dimensionale Tensorraum  $V^{\otimes 3}$  ist somit vollständig reduziert:

$$V^{\otimes 3} = T'_s \oplus T'_\kappa(1) \oplus T'_\kappa(2) = T'_s \oplus T'_\kappa(1) \oplus T'_\kappa(2)$$

$\swarrow$   
 inv. unter  $S_3$

$\swarrow$   
 inv. unter  $\text{GL}(2)$

$T'_s$  trägt übrigens eine 4-dimensionale irreduzible Darstellung von  $\text{GL}(2)$  und zerfällt unter  $S_3$  in eine direkte Summe aus 4 eindimensionalen Räumen, die jeweils die triviale Darstellung tragen. Als Basistensoren von  $V^{\otimes 3}$  können wir wählen:

- Die 4 total symmetrischen Tensoren  $|s, \alpha, 1\rangle$  aus Abschnitt 7.3.2 mit  $\alpha = 1, \dots, 4$
- Die 4 Tensoren  $|\kappa, \alpha, a\rangle$  mit  $\alpha = 1, 2$  und  $a = 1, 2$ .

### 7.3.4 Vollständige Reduzierung des Tensorraums

Die Beobachtungen aus Abschnitt 7.3.3 verallgemeinern sich wie folgt:

- Zwei Unterräume des Tensorraums  $V^{\otimes n}$ , die invariant und irreduzibel unter  $S_n$  sind und zur selben Symmetrieklasse  $\lambda$  gehören, sind entweder identisch oder disjunkt.
- Wenn die zwei irreduziblen, invarianten Unterräume zu verschiedenen Symmetrieklassen gehören, sind sie disjunkt.
- Der Tensorraum kann vollständig zerlegt werden in irreduzible, invariante Unterräume bzgl.  $S_n$ ,

$$V^{\otimes n} = \sum_{\lambda \oplus} \sum_{\alpha \oplus} T_\lambda(\alpha).$$

Dabei treten nur Young-Diagramme auf, die höchstens  $m$  Zeilen haben. (gleiches Argument wie bei den vollständig antisymmetrischen Tensoren in Abschnitt 7.3.2)



- Eine Basis von  $T_\lambda(\alpha)$  bilden die Tensoren  $|\lambda, \alpha, a\rangle$  mit  $a = 1, \dots, \dim(T_\lambda(\alpha))$ .
- Die Basistensoren können so gewählt werden, dass die Darstellungsmatrizen für  $S_n$  auf  $T_\lambda(\alpha)$  identisch sind für alle  $\alpha$ , die zur selben Symmetrieklasse  $\lambda$  gehören:

$$p|\lambda, \alpha, a\rangle = |\lambda, \alpha, b\rangle \underbrace{\Gamma^\lambda(p)_{ba}}_{\text{unabh. von } \alpha} \quad \text{für alle } p \in S_n$$

- Die Zerlegung von  $V^{\otimes n}$  bzgl. der Symmetrieklassen von  $S_n$  führt automatisch zu einer Zerlegung von  $V^{\otimes n}$  in irreduzible, invariante Unterräume von  $\text{GL}(m)$ :
  - Die Unterräume  $T'_\lambda(a)$ , die von den  $|\lambda, \alpha, a\rangle$  mit festem  $\lambda$  und festem  $a$  aufgespannt werden, sind invariant (s.o.) und irreduzibel (ohne Beweis) unter  $\text{GL}(m)$ .
  - Die irreduzible Darstellung von  $\text{GL}(m)$  auf  $T'_\lambda(a)$ , ist unabhängig von  $a$ , d.h. zu gleichen Young-Diagrammen gehören die gleichen irreduziblen Darstellungen von  $\text{GL}(m)$ .

**Beweis:** Sei  $|x\rangle \in T_\lambda(\alpha) \subseteq T'_\lambda$ . Dann existiert ein  $r \in \mathcal{A}(S_n)$  mit

$$|x\rangle = re_\lambda|\alpha\rangle.$$

Für jedes  $g \in \text{GL}(m)$  gilt (wegen  $gp = pg \forall p \in S_n$ )

$$g(re_\lambda)|\alpha\rangle = (re_\lambda)g|\alpha\rangle \in T_\lambda(g\alpha) \subseteq T'_\lambda,$$

d.h. durch  $g$  wird die Symmetrieklasse nicht verändert, also gilt

$$g|\lambda, \alpha, a\rangle = |\lambda, \beta, b\rangle D^\lambda(g)_{(\beta b)(\alpha a)}$$

(Summe über das Indexpaar  $(\beta b)$ )

Das wussten wir natürlich auch deshalb bereits, weil die  $T'_\lambda(a)$  invariant unter  $\text{GL}(m)$  sind.

Zeige nun, dass  $D^\lambda(g)_{(\beta b)(\alpha a)}$  diagonal in den Indizes  $(a, b)$  ist.

Sei wieder  $g \in \text{GL}(m)$ ,  $p \in S_n$ :

$$gp|\lambda, \alpha, a\rangle = g|\lambda, \alpha, c\rangle \Gamma^\lambda(p)_{ca} = |\lambda, \beta, b\rangle D^\lambda(g)_{(\beta b)(\alpha c)} \Gamma^\lambda(p)_{ca}$$

und

$$pg|\lambda, \alpha, a\rangle = p|\lambda, \beta, c\rangle D^\lambda(g)_{(\beta c)(\alpha a)} = |\lambda, \beta, b\rangle \Gamma^\lambda(p)_{bc} D^\lambda(g)_{(\beta c)(\alpha a)}.$$

Wegen  $gp = pg$  sind die rechten Seiten gleich. Statt der lateinischen Indizes schreibe ein Matrixprodukt:

$$D^\lambda(g)_{\beta\alpha} \Gamma^\lambda(p) = \Gamma^\lambda(p) D^\lambda(g)_{\beta\alpha}.$$

Da gültig  $\forall p \in S_n$  folgt mit dem Schur'schen Lemma (Satz 4), dass  $D^\lambda(g)_{\beta\alpha}$  ein Vielfaches der Einheitsmatrix bzw.  $D^\lambda(g)_{(\beta c)(\alpha a)}$  diagonal in den lateinischen Indizes ist.  $\square$

### 7.3.5 Dimensionen der $GL(m)$ -Darstellungen

Im Prinzip klar, denn zu jedem Young-Diagramm  $\Theta_\lambda$  gehört eine Darstellung  $\Gamma^\lambda$  von  $S_n$  und eine Darstellung  $D^\lambda$  von  $GL(m)$ . Für die  $S_n$ -Darstellung können wir Dimension und Multiplizität (wie oft sie in einer Produktdarstellung vorkommt) mit den Methoden aus Abschnitt 4.3.1 und Kapitel 5 bestimmen. Gemäß der Konstruktion in den Abschnitten 7.3.1–7.3.4 ist die Multiplizität von  $\Gamma^\lambda$  gleich der Dimension von  $D^\lambda$  und umgekehrt. Die Bestimmung auf diesem Weg ist aber mühsam, daher...

**Graphische Regel:** Betrachte ein Young-Diagramm, z.B.  $\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & & \end{array}$  (also  $S_7$ ), und das zugehörige normale Young-Tableau

$$\Theta_\lambda = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & & \\ 7 & & & \end{array}.$$

Wende den Young-Operator  $e_\lambda$  auf  $|i_1 \dots i_7\rangle$  an. ( $i_k \in 1, 2, \dots, m$ , i.A.  $m \neq n$ , hier  $n = 7$ )

**Frage:** Für welche Startvektoren entstehen linear unabhängige Ergebnisse?

Schreibe die  $i_s$  in das Young-Diagramm:

$$\begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ i_5 & i_6 & & \\ i_7 & & & \end{array} \quad (*)$$

Es war  $e_\lambda = s_\lambda a_\lambda$  (siehe Abschnitt 5.3). Daher gilt:

- (i)  $e_\lambda |i_1 \dots i_n\rangle = 0$  falls zwei gleiche Zahlen in einer Spalte stehen.
- (ii)  $e_\lambda v_\lambda = \text{sgn}(v_\lambda) e_\lambda$  und damit sind  $e_\lambda v_\lambda |i_1 \dots i_n\rangle$  und  $e_\lambda |i_1 \dots i_n\rangle$  linear abhängig.

Es genügt also, solche Startvektoren  $|i_1 \dots i_n\rangle$  zu betrachten, bei denen die Zahlen in (\*) in jeder Spalte *aufsteigend* sind.

Wähle nun die  $i_s$  so, dass sie in den Zeilen *nicht abfallen*. (Hier sind gleiche Werte zulässig!)

Man kann zeigen:

- (i) Die so erhaltenen  $e_\lambda |i_1 \dots i_n\rangle$  sind linear unabhängig.
- (ii)  $e_\lambda h_\lambda |i_1 \dots i_n\rangle$  ist eine Linearkombination der bereits erhaltenen Tensoren.

Denn wegen  $h_\lambda e_\lambda = a_\lambda$  sind die  $e_\lambda |i_1 \dots i_n\rangle$  symmetrisch in allen  $i_s$ , die in (\*) in einer Zeile stehen. Dies begrenzt die Anzahl der Basistensoren, die zu einer festen Menge  $\{i_1, \dots, i_n\}$  von Indizes erzeugt werden kann.

Damit lässt sich die Dimension der  $GL(m)$ -Darstellungen berechnen, z.B. gilt für  $m = 2$  (vgl. Abschnitt 7.3.3)

$$\dim D^{\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \end{array}} = 2 \quad \text{und} \quad \dim D^{\begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & & \end{array}} = 4,$$

denn die zulässigen Möglichkeiten sind

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{bzw. } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

Für  $\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$  und  $m = 2$  gibt es keine zulässige Verteilung der Zahlen 1 und 2. (Das ist konsistent damit, dass es keine antisymmetrischen Tensoren mit  $n > m$  gibt, vgl. Abschnitt 7.3.2.)

Weiter folgt auch  $\dim D^\square = 2$  für  $GL(2)$ , denn  $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$  und  $\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$ , und allgemein

$$\dim D^\square = m \quad \text{für} \quad GL(m).$$

Wir schreiben  $D^\square$  für die definierende Darstellung, d.h.

$$V^{\otimes n} = \underbrace{\square \otimes \dots \otimes \square}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Damit können wir das Ergebnis von Abschnitt 7.3.3 ausdrücken als

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 2 + 2.$$

(Für  $GL(2)$ ! In den Übungen dann für  $m = 3$ .)

**Weitere Formeln** für die Dimensionen der  $GL(m)$ -Darstellungen (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} \dim(D^\lambda) &= \left( \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \right) \det \left[ (\lambda_i + m - i)^{m-j} \right]_{i,j=1,\dots,m} = \left( \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \right) \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j - i + j) \\ &= \prod_{i,j} \frac{m + j - i}{h_{ij}} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Produkt über alle Felder von } \Theta_\lambda \\ i = \text{Zeilenindex, } j = \text{Spaltenindex} \end{array} \right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Hakenlänge des Feldes } i, j \text{ (siehe Abschnitt 5.5)} \end{aligned}$$

Zurück zum Beispiel  $V^{\otimes 3}$ ,  $m = 2$ :

$$\begin{aligned} \dim(D^{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}}) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \\ &= \frac{2+1-1}{3} \cdot \frac{2+2-1}{2} \cdot \frac{2+3-1}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 4 \\ \dim(D^{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}}) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \\ &= \frac{2+1-1}{3} \cdot \frac{2+2-1}{1} \cdot \frac{2+1-2}{1} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Mit der Tensormethode kann man alle sogenannten ganzrationalen irreduziblen Darstellungen von  $GL(m)$  konstruieren, d.h. die Elemente der Darstellungsmatrizen sind homogene Polynome in den  $g_{ij}$ . Es gibt aber noch andere Darstellungen.

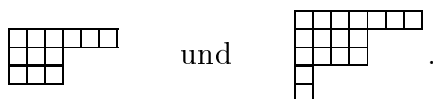
## 7.4 Irreduzible Darstellungen von $U(m)$ und $SU(m)$

- Die irreduziblen Darstellungen von  $GL(m)$  aus Abschnitt 7.3.4 induzieren auch Darstellungen der Untergruppen von  $GL(m)$ . Diese müssen i.A. nicht irreduzibel sein, sind es aber für  $U(m)$  und  $SU(m)$ , jedoch nicht für  $O(m)$ . Weitere irreduzible Darstellungen von  $U(m)$  und  $SU(m)$  gibt es nicht.
- Wegen  $U(m) = (SU(m) \times U(1))/\mathbb{Z}_m$  (direktes Produkt, siehe Abschnitt 1.8) sind die Darstellungen von  $U(m)$  gegeben durch


$$D_{U(m)}^\lambda(g) = (\det g)^k D_{SU(m)}^\lambda(\tilde{g}) \quad \text{für } g \in U(m) \text{ und } \tilde{g} \in SU(m) \text{ mit einem } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir betrachten im Folgenden nur noch  $SU(m)$ .

- Für  $SU(m)$  sind die beiden irreduziblen Darstellungen, die zu den Young-Diagrammen  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  und  $(\lambda_1 + k, \dots, \lambda_m + k)$  gehören, äquivalent – z.B. für  $m = 5$  und  $k = 1$





Beweis in ÜA 45. (Die beiden Diagramme unterscheiden sich durch einen Faktor  $(\det g)^k$ , und  $\det g = 1$  für  $g \in SU(m)$ )

- Aus dem Beweis folgt auch, dass das Young-Diagramm  ( $m$  Felder) der trivialen Darstellung von  $SU(m)$  entspricht, d.h.

$$g \mapsto 1 \quad \forall g \in SU(m).$$

Funktionen, die sich unter  $SU(m)$  in dieser Darstellung transformieren, heißen  $SU(m)$ -Skalare oder  $SU(m)$ -Singulets. Solche Funktionen transformieren sich aber in der total antisymmetrischen Darstellung von  $S_m$ .

- Irreduzible Darstellungen von  $SU(2)$ :
  - definierende / fundamentale Darstellung:  mit Dimension 2
  - triviale Darstellung:  mit Dimension = 1
  - $m = 2 \Rightarrow$  die Young-Diagramme haben höchstens 2 Zeilen, d.h. jede irreduzible Darstellung ist äquivalent

\* entweder zu ,

$$\text{z.B. } \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

\* oder zu einem Diagramm mit einer Zeile, das man durch Abschneiden aller Spalten mit zwei Feldern erhält,

$$\text{z.B. } \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

⇒ Wir müssen außer  $\square$  nur Diagramme mit einer Zeile betrachten.

– Dimension der Darstellung zum Diagramm mit einer Zeile und  $k$  Feldern:

$$\underbrace{\boxed{1 \cdots 1 \mid 1}, \boxed{1 \cdots 1 \mid 2}, \boxed{1 \cdots 2 \mid 2}, \boxed{2 \cdots 2 \mid 2}}_{k+1 \text{ Möglichkeiten}}$$

Alternativ mit Hakenlängen:

$$\prod_{ij} \frac{m+j-i}{h_{ij}} = \prod_{j=1}^k \frac{2+j-1}{k-j+1} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1$$

⇒ Für  $SU(2)$  gibt es zu jedem  $k \in \mathbb{N}_0$  genau eine irreduzible Darstellung mit Dimension  $k+1$  (vgl. mit Abschnitt 6.8)

• Irreduzible Darstellungen von  $SU(3)$ :

– fundamentale Darstellung:  $\square$  mit Dimension 3

– triviale Darstellung:  $\square$  mit Dimension 1

–  $m=3 \Rightarrow$  die Young-Diagramme haben höchstens 3 Zeilen, d.h. alle Darstellungen sind äquivalent entweder zu  $\square$  oder zu einem Diagramm mit höchstens 2 Zeilen, d.h.  $(\lambda_1, \lambda_2, 0)$  mit

$$\dim(D^\lambda) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} (\lambda_1+2)^2 & \lambda_1+2 & 1 \\ (\lambda_2+1)^2 & \lambda_2+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\lambda_1+2)(\lambda_2+1)(\lambda_1-\lambda_2+1).$$

## 7.5 Reduzierung des Produktes zweier irreduzibler Darstellungen

Gegeben seien zwei irreduzible Darstellungen  $D^\lambda$  und  $D^{\lambda'}$  von  $GL(m)$ ,  $U(m)$  oder  $SU(m)$  mit Young-Diagrammen  $\Theta_\lambda$  und  $\Theta_{\lambda'}$ .

**Aufgabe:** Reduziere die Produktdarstellung  $D^\lambda \otimes D^{\lambda'}$ .

Aus dem bisher Gelernten kann man dafür eine einfache graphische Regel herleiten (ohne Beweis):

1. Schreibe die Zahl  $i$  in alle Felder der Zeile  $i$  von  $\Theta_{\lambda'}$ .
2. Betrachte alle Möglichkeiten, die Felder von  $\Theta_{\lambda'}$  in der Reihenfolge "zuerst die Einsen, dann die Zweien usw." dem Young-Diagramm  $\Theta_\lambda$  hinzuzufügen, nach folgenden Regeln:
  - (a) In jedem Schritt muß das resultierende Young-Diagramm erlaubt sein und darf nicht mehr als  $m$  Zeilen haben.
  - (b) Dieselbe Zahl darf nicht zweimal in einer Spalte auftreten.
  - (c) Wenn die Zahlen in der Reihenfolge "Zeilen von oben nach unten, jede Zeile von rechts nach links" gelesen werden, darf es in dieser Zahlenfolge nie mehr  $i$ s als  $i$ -1s geben.
3. Wenn zwei so erzeugte Young-Diagramme dieselbe Form haben, werden sie nur als verschieden gezählt, wenn die  $i$ s verschieden verteilt sind.
4. Für  $SU(m)$  können Spalten mit  $m$  Feldern gestrichen werden.
5. Als Konsistenztest immer die Dimensionen auf beiden Seiten vergleichen!

**Beispiele:**

1.  $SU(2)$

$$\begin{aligned}
 5 \otimes 4 &= (j=2) \otimes (j=\frac{3}{2}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 &= \left( \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 &= \left( \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & 1 & 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
 &= \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 &= 8 \oplus 6 \oplus 4 \oplus 2 = (j=\frac{7}{2}) \oplus (j=\frac{5}{2}) \oplus (j=\frac{3}{2}) \oplus (j=\frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

Das wurde übrigens in ÜA 44 b) mit einer anderen Methode berechnet.

## 2. SU(3)

Die Querbalken über manchen Zahlen dürfen momentan getrost ignoriert werden – Ihre Bedeutung wird im nächsten Abschnitt erklärt.

$$\bar{3} \otimes 3 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = 8 \oplus 1$$

$$\text{oder } 3 \otimes \bar{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = 8 \oplus 1$$

$$3 \otimes 3 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = 6 \oplus \bar{3}$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = \left( \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$= 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

$$8 \otimes 8 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \left( \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$= \left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right) \otimes \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & 2 & 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

$$= 27 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

## 7.6 Komplexkonjugierte Darstellungen

**Beobachtung:** Gelegentlich gilt  $\dim D^\lambda = \dim D^{\lambda'}$  für  $\lambda \neq \lambda'$ . In manchen Fällen ist das ‘Zufall’, in anderen lässt es sich durch die folgende Konstruktion verstehen. Zunächst ein Beispiel...

**Beispiel:** Betrachte  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  für  $m = 3$ .

Basistensoren: (antisymmetrische Tensoren 2. Stufe in 3 Dimensionen)

$$|23\rangle - |32\rangle, \quad |31\rangle - |13\rangle, \quad |12\rangle - |21\rangle.$$

Wirkung von  $GL(3)$ , z.B.

$$\begin{aligned}
 g(|12\rangle - |21\rangle) &= |ij\rangle(g_{i1}g_{j2} - g_{i2}g_{j1}) \\
 &= \underbrace{|23\rangle(g_{21}g_{32} - g_{22}g_{31}) + |32\rangle(g_{31}g_{22} - g_{32}g_{21})}_{=(|23\rangle - |32\rangle) \det \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{pmatrix}} \\
 &\quad + \underbrace{|31\rangle(g_{31}g_{12} - g_{32}g_{11}) + |13\rangle(g_{11}g_{32} - g_{12}g_{31})}_{=(|31\rangle - |13\rangle)(-1) \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{pmatrix}} \\
 &\quad + \underbrace{|12\rangle(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) + |21\rangle(g_{21}g_{12} - g_{22}g_{11})}_{=(|12\rangle - |21\rangle) \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}},
 \end{aligned}$$

analog für die anderen beiden. Damit gilt

$$D^{\square}(g) = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} & (-1) \det \begin{pmatrix} g_{21} & g_{23} \\ g_{31} & g_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{pmatrix} \\ (-1) \det \begin{pmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{pmatrix} & (-1) \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{31} & g_{32} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{pmatrix} & (-1) \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \text{adj}(g)^T,$$

Mit der zu  $g$  adjunkten Matrix  $\text{adj}(g)$ . Laut Cramerscher Regel gilt  $g^{-1} = \frac{\text{adj}(g)}{\det g}$ , d.h.

$$D^{\square}(g) = \det g \cdot (g^{-1})^T.$$

**Bemerkungen:**

1. Dies zeigt man analog für beliebiges  $m$  und das Young-Diagramm  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  ( $m-1$  Felder).
2. Vergleiche auch mit der zweidimensionalen Darstellung aus Abschnitt 7.3.3.

Für  $SU(3)$  ist  $\det g = 1$  und  $g^{-1} = g^\dagger$ , d.h.  $D^{\square}(g) = g^*$ . Wir schreiben  $\square = \overline{\square}^*$  und setzen einen Querbalken über die Dimension.

Für  $GL(m)$  ist die Situation tatsächlich noch etwas komplizierter, als in den vorherigen Abschnitten suggeriert wurde: Neben der definierenden Darstellung  $g$  sind auch  $(g^{-1})^T$ ,  $g^*$  und  $((g^{-1})^T)^*$   $m$ -dimensionale Darstellungen von  $GL(m)$ . Diese sind i.A. nicht äquivalent zu  $g$ . Das Young-Diagramm  $\square$  steht dann manchmal für  $g$ , manchmal für eine der anderen Darstellungen, mit entsprechenden Komplikationen für andere Young-Diagramme. Wir haben in den vorangegangenen Abschnitten demonstriert, dass wir mithilfe der Young-Diagramme Produktdarstellungen von  $GL(m)$  in irreduzible Darstellungen zerlegen, und



deren Dimensionen bestimmen können – ob die Darstellungen, die den gleichen Young-Diagrammen in verschiedenen Rechnungen zugeordnet sind, äquivalent sind, haben wir nicht gezeigt.

Für  $SU(m)$  gilt wegen  $g^\dagger = g^{-1}$ , dass

$$(g^{-1})^T = g^* \quad \text{und} \quad ((g^{-1})^T)^* = g,$$

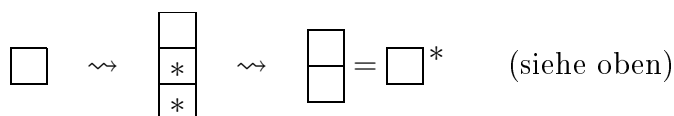
d.h. je zwei der vier Darstellungen sind äquivalent. Weiter erhält man die zu einer Darstellung komplexkonjugierte Darstellung, durch folgende graphische Regel, d.h. für  $SU(m)$  ist die Zuordnung von Young-Diagrammen und zu irreduziblen Darstellungen eindeutig.

### Komplexkonjugierte Darstellungen für $SU(m)$

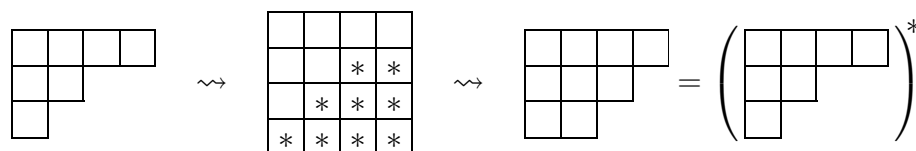
1. Starte mit einem Young-Diagramm mit höchstens  $m-1$  Zeilen. (Das einzige  $m$ -zeilige Diagramm entspricht der trivialen Darstellung, die gleich ihrem Komplexkonjugierten ist.)
2. Ergänze das Diagramm zu einem Rechteck der Höhe  $m$  und der Breite des ursprünglichen Diagramms.
3. Die hinzugefügten Kästen, um  $180^\circ$  gedreht, bilden das Young-Diagramm der komplexkonjugierten Darstellung.

#### Beispiele:

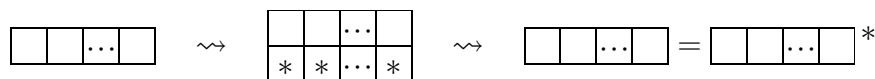
1.  $SU(3)$



2.  $SU(4)$

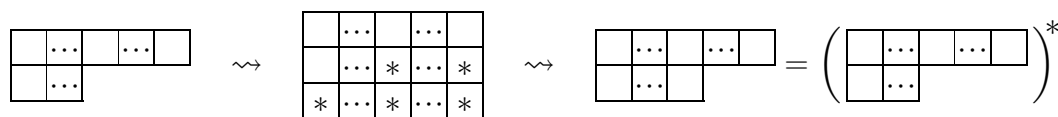


3.  $SU(2)$  allgemein



Dies ist konsistent mit ÜA 43: Dort wurde gezeigt, dass für  $SU(2)$  jede Darstellung äquivalent zu ihrem Komplexkonjugierten ist.

4.  $SU(3)$  allgemein



d.h.  $(\lambda_1, \lambda_2)^* = (\lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2)$ .

## 8 Anwendungen in der Teilchenphysik

### 8.1 Arten von Elementarteilchen

- Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik gibt es 4 Kräfte/Wechselwirkungen (WW):
  1. starke WW
  2. elektromagnetische WW
  3. schwache WW
  4. Gravitation
- “Elementarteilchen” fallen in drei Klassen:
  1. Leptonen (z.B. Elektron): Spin  $\frac{1}{2}$ , unterliegen nicht der starken WW
  2. Hadronen (z.B. Proton): unterliegen der starken WW
  3. Teilchen, die die Kräfte übertragen: Spin ganzzahlig (z.B. Photon, Gluon)
- Hadronen sind aus kleineren Bausteinen (Quarks mit Spin  $\frac{1}{2}$ ) zusammengesetzt und fallen in zwei Klassen:
  - (a) Baryonen ( $\sim qqq$ , z.B. Proton, Neutron): Spin =  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$
  - (b) Mesonen ( $\sim \bar{q}q$ , z.B. Pionen): Spin =  $0, 1, 2, \dots$
- Leptonenzahl:

$$L = \begin{cases} 1 & \text{für Leptonen} \\ -1 & \text{für Antileptonen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Baryonenzahl:

$$B = \begin{cases} 1 & \text{für Baryonen} \\ -1 & \text{für Antibaryonen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Quarks:  $B = \frac{1}{3}$ , Antiquarks:  $B = -\frac{1}{3}$

## 8.2 SU(2)-Isospin

- Experimentelle Beobachtung: Es gibt unter den Hadronen kleine Grüppchen (“Multipletts”), die jeweils ungefähr dieselbe Masse (= Eigenwert von  $H$ ) haben, z.B. Proton  $p$  und Neutron  $n$  (Baryonen):  $m_p \approx m_n \approx 940$  MeV oder die drei Pionen (Mesonen):  $m_{\pi^0} \approx m_{\pi^+} \approx m_{\pi^-} \approx 140$  MeV.
- Theoretische Erklärung:
  - Die starke WW bestimmt die Massen (hauptsächlich) und ist unabhängig von der elektrischen Ladung.
  - Die (kleinen) Massendifferenzen kommen von der elektroschwachen WW.
- Wie gewohnt sollten sich die entarteten Zustände in irreduzible Darstellungen einer “inneren” Symmetriegruppe transformieren. Diese ist zunächst unbekannt.  
 $\rightsquigarrow$  Finde eine Gruppe, die das beobachtete Teilchenspektrum erklärt (d.h. Grade der Entartung = Dimensionen der irreduziblen Darstellungen).
- Betrachte zunächst  $p$  und  $n$  und definiere ein Objekt mit 2 Komponenten, das Nukleon,

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

- Dieses lebt in einem 2-dimensionalen Raum, dem “Isospin”-Raum.
- Betrachte SU(2)-Transformationen in diesem Raum, mit Generatoren  $I_1, I_2, I_3$ .
- $p$  hat  $I_3 = \frac{1}{2}$ ,  $n$  hat  $I_3 = -\frac{1}{2}$  (per Definition)
- Der Hamilton-Operator der starken WW kommutiert mit allen 3 Generatoren, d.h.

$$[H, \vec{I}] = 0.$$

Man sagt die starke WW ist invariant unter  $SU(2)_{\text{Isospin}}$ .

- $N$  transformiert sich in der 2-dimensionalen fundamentalen, bzw. *Duplett*-Darstellung ( $I = \frac{1}{2}$ ) von  $SU(2)_{\text{Isospin}}$ .
  - Elektrische Ladung  $Q$  folgt dann aus Isospin zu  $Q = I_3 + \frac{1}{2}$ .
- Ähnlich transformieren sich andere Hadronen in anderen irreduziblen Darstellungen von  $SU(2)_{\text{Isospin}}$

z.B. bilden die Pionen ein Isospin-*Triplet* ( $I = 1$ ) mit

$$\begin{aligned} \pi^+ &: I_3 = 1 \\ \pi^0 &: I_3 = 0 \\ \pi^- &: I_3 = -1. \end{aligned}$$

- Elektrische Ladung passt nicht mit obiger Formel  $\rightsquigarrow$  postuliere *Hyperladung*  $Y$  (später  $U(1)$ ) mit

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y .$$

Das Nukleon (p und n) hat  $Y = 1$ , die 3 Pionen haben  $Y = 0$ .

- Verschiedene Isospin-Multipletts unterscheiden sich durch die anderen Quantenzahlen der starken WW ( $B, Y, I, J = \text{Spin}, P = \text{Parität}$ ). Für alle Teilchen innerhalb eines Multiplett sind diese Quantenzahlen gleich.
- Ein weitergehendes Klassifizierungsschema für die Hadronen folgt aus dem  $SU(3)$ -Flavor Quarkmodell, siehe Abschnitt 8.4.

### 8.3 $SU(2)$ -Flavor

... ist eigentlich immer noch  $SU(2)_{\text{Isospin}}$ , aber auf der Ebene der Quarks.

- Hadronen sind aus Quarks zusammengesetzt, deren WW durch die QCD beschrieben wird.
- In der Natur gibt es 6 Quark-“Flavors” (u, d, s, c, b, t). Davon sind 2 sehr leicht (u, d), einer “leicht” (s), und 3 schwer (c, b, t).
- In Experimenten mit niedrigen Energien beobachtet man nur Teilchen, die aus u und d bestehen.  
 $\rightsquigarrow$  Betrachte zunächst nur  $N_f = 2$ , d.h. einen 2-dimensionalen Flavor-Raum.
- Der tiefere Grund für die Isospin-Invarianz der Hadronenmassen ist, dass für  $m_u = m_d$  die QCD-Lagrangedichte invariant unter  $SU(2)_{\text{Flavor}}$ -Transformationen ist, d.h. die innere Symmetriegruppe ist  $SU(2)_{\text{Flavor}}$ .
- Die 2-dimensionale fundamentale Darstellung von  $SU(2)_{\text{Flavor}}$  operiert auf

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{up-Quark} \quad (I_3 = \frac{1}{2}, Y = \frac{1}{3} \Rightarrow Q = \frac{2}{3}), \\ \text{down-Quark} \quad (I_3 = -\frac{1}{2}, Y = \frac{1}{3} \Rightarrow Q = -\frac{1}{3}), \end{array}$$

d.h.  $q$  transformiert sich als Duplett unter  $SU(2)_{\text{Flavor}}$  ( $I = \frac{1}{2}, Y = \frac{1}{3}$ ).  
(Zunächst ist also Flavor gleich Isospin.)

- Im Quarkmodell haben die beiden Nukleonen den “Quark-Inhalt”

$$\begin{array}{ll} p \sim uud & (I_3 = \frac{1}{2}, Y = 1 \Rightarrow Q = 1) \\ n \sim udd & (I_3 = -\frac{1}{2}, Y = 1 \Rightarrow Q = 0) \end{array}$$

( $\sim$  bedeutet, dass wir uns zunächst nicht um Permutationen der Quarks kümmern), d.h. wir haben zunächst Produktzustände der Form  $\square \otimes \square \otimes \square$ . Dabei steht  $\square$  für die zweidimensionale definierende Darstellung mit  $I = \frac{1}{2}$  und  $Y = \frac{1}{3}$ .

- Da sich Teilchen eines Multipletts in irreduziblen Darstellungen transformieren, zerlegen wir das Produkt:

$$\square \otimes \square \otimes \square = \left( \square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \square = \square\square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \square\square\square \oplus \square \oplus \square$$

bzw. in Dimensionen,

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 2 + 2$$

oder durch die Isospin-Quantenzahl  $I$  ausgedrückt,

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}.$$

In Abschnitt 8.4 werden wir sehen:

- Das Duplett  $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  entspricht einer Linearkombination der beiden zweidimensionalen irreduziblen Darstellungen ( $I = \frac{1}{2}$ ,  $Y = 1$ ) auf der rechten Seite.
  - Die 4-dimensionale irreduzible Darstellung ( $I = \frac{3}{2}$ ,  $Y = 1$ ) entspricht den  $\Delta$ -Baryonen.
- Mesonen bestehen im Quarkmodell aus einem Quark und einem Antiquark. Letztere erhält man durch Anwendung des Ladungsumkehr-Operators  $C = AK$ . Dabei ist  $A$  ein selbstadjungierter Operator und  $K$  der Operator der Komplexkonjugation:

$$Cu =: \bar{u} \quad Cd =: \bar{d}$$

Betrachte eine  $SU(2)$  Transformation des Quark-Dupletts:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= g \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \\ \Rightarrow C \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} &= g^* C \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (A \text{ kommutiert mit } g) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} &= g^* \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. das “Anti-Duplett”  $\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}$  transformiert sich in  $\bar{2}$

Da für  $SU(2)$   $\bar{2}$  äquivalent zu  $2$  ist, können wir  $\bar{u}$  und  $\bar{d}$  auch so zu einem Duplett zusammenfassen, dass dieses sich in  $2$  transformiert: Mit  $h = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SU(2)$  gilt (vgl. ÜA 43)

$$\begin{aligned} g^* &= h^{-1} g h \\ \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} &= h^{-1} g h \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \\ h \begin{pmatrix} \bar{u}' \\ \bar{d}' \end{pmatrix} &= g h \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d.h.  $h \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$  transformiert sich wie  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  in 2, also als Isospin-Duplett mit

$$\begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} (I_3 = \frac{1}{2}, Y = -\frac{1}{3} \Rightarrow Q = \frac{1}{3}), \\ (I_3 = -\frac{1}{2}, Y = -\frac{1}{3} \Rightarrow Q = -\frac{2}{3}), \end{aligned}$$

(Hier wurde noch hineingesteckt, dass  $Y \mapsto -Y$  unter  $C$ .)

Zerlege nun also

$$\square \otimes \square^* = \begin{array}{c} \square \otimes \square \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \end{array} = \square\square \oplus \square$$

bzw.  $2 \cdot 2 = 3 + 1$  (Dimensionen)

oder  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$  (Isospin).

Konstruiere Multipletts wie am Ende von Abschnitt 7.3.2.

Dort war: Tripletts =  $\{|11\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|12\rangle + |21\rangle), |22\rangle\}$  und Singulett =  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|12\rangle - |21\rangle)$ .

– Das Isospin-Triplett ( $I = 1, Y = 0$ ) entspricht den Pionen:

$$\begin{aligned} I_3 = 1 : & \quad \pi^+ = -u\bar{d} \\ I_3 = 0 : & \quad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ I_3 = -1 : & \quad \pi^- = d\bar{u} \end{aligned}$$

Diese Zustände sind alle invariant unter  $u \leftrightarrow -\bar{d}, d \leftrightarrow \bar{u}$ .

– Das Singulett ist die antisymmetrische Kombination von je einem Basisvektor mit  $I_3 = \frac{1}{2}$  und  $I_3 = -\frac{1}{2}$ , d.h.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d(-\bar{d})) = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}).$$

In Abschnitt 8.4 werden wir sehen, dass dies dem  $\omega$ -Meson entspricht.

Die Einführung des Dupletts  $\begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$  ist nicht zwingend notwendig. Wir hätten auch direkt mit den Young-Operatoren für die Zerlegung  $2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$  auf  $\text{span}(u\bar{u} + d\bar{d})$  und  $\text{span}(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$  projizieren können. Die Wahl einer Eigenbasis von  $I_3$  im dreidimensionalen Unterraum liefert dann die Pionen.

## 8.4 SU(3)-Flavor und das Quarkmodell

- Bei höheren Energien tritt zusätzlich das strange-Quark auf.  
 $\rightsquigarrow$  Betrachte nun  $N_f = 3$ , d.h. einen 3-dimensionalen Flavor-Raum mit innerer Symmetriegruppe  $SU(3)_{\text{Flavor}}$ .
- Zusätzliche Quantenzahl: Strangeness  $S$ , mit  $Y = S + B$

	$B$	$I$	$I_3$	$Y$	$S$	$Q$
$u$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$d$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
$s$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$

- QCD-Prozesse lassen  $S$  (und damit  $Y$ ) invariant.
- $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  ist nur invariant unter  $SU(3)_{\text{Flavor}}$ , wenn  $m_u = m_d = m_s$ . Da  $m_u \approx m_d < m_s$ , ist diese Symmetrie nicht exakt, sondern gebrochen zu  $SU(2)_I \times U(1)_Y$ .  
 $\Rightarrow$  Keine perfekte Entartung, sondern "kleine" Unterschiede in den Hadronenmassen innerhalb eines  $SU(3)$ -Multipletts.  
 (siehe ÜA 48: Gell-Mann-Okubo-Formel für das Baryonen-Dekuplett)
- Die definierende Darstellung 3 von  $SU(3)_{\text{Flavor}}$  operiert auf

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}.$$

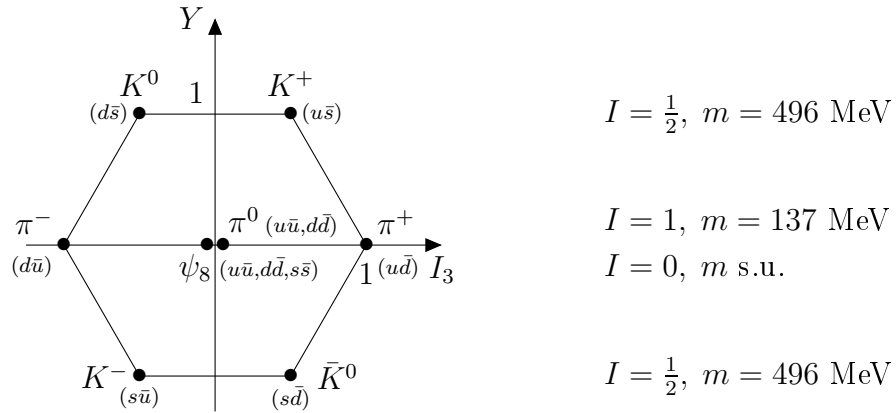
- Mesonen bestehen aus einem Quark und einem Antiquark (das sich in  $\bar{3}$  transformiert). Zerlege also

$$\square \otimes \bar{\square} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \text{bzw.} \quad 3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1,$$

d.h. wir erwarten Multipletts von annähernd entarteten Mesonen finden, die aus 8 bzw. einem Teilchen bestehen.

- Experimenteller Befund: Die leichtesten (d.h. Grundzustands-) Mesonen bilden in der Tat ein Oktett und ein Singulett (zusammen auch Nonett genannt), mit Quantenzahlen  $B = 0$  und  $J^P = 0^-$ .  $J$  ist hier der gewöhnliche Spin.

- Pseudoskalares Mesonen-Oktett (skalar wegen  $J = 0$ , pseudo wegen  $P = -1$ ):



(Massenunterschiede wegen Masse des strange Quarks)

- Pseudoskalares Mesonen-Singulett:  $\psi_1$  mit  $I = Y = 0$ .
- In Wirklichkeit ist es ein bißchen komplizierter:
  - Betrachte die 3 Zustände mit  $I_3 = Y = 0$ :
    - \*  $\pi^0$  ist der  $I_3 = 0$  Zustand des Isospin-Tripletts, d.h.  $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$ .
    - \*  $\psi_1$  ist der SU(3)-Singulett Zustand, d.h.  $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$ .
    - \*  $\psi_8$  ist der SU(3)-Oktett, Isospin-Singulett Zustand.  
Dieser muß orthogonal sein zu  $\pi^0$  und  $\psi_1$ , d.h.  $\psi_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$ .
  - $\psi_1$  und  $\psi_8$  haben dieselben Quantenzahlen ( $I = 0$  und  $J^{PC} = 0^{-+}$ ).
    - \* Wäre SU(3)<sub>Flavor</sub> exakt, dann wären  $\psi_1$  und  $\psi_8$  physikalische Zustände (also Teilchen), da sie sich in verschiedenen irreduziblen Darstellungen von SU(3) transformieren.
    - \* SU(3) ist aber explizit gebrochen.  
→ Zustände, die zu verschiedenen irreduziblen Darstellungen gehören (aber dieselben Quantenzahlen haben), können mischen:

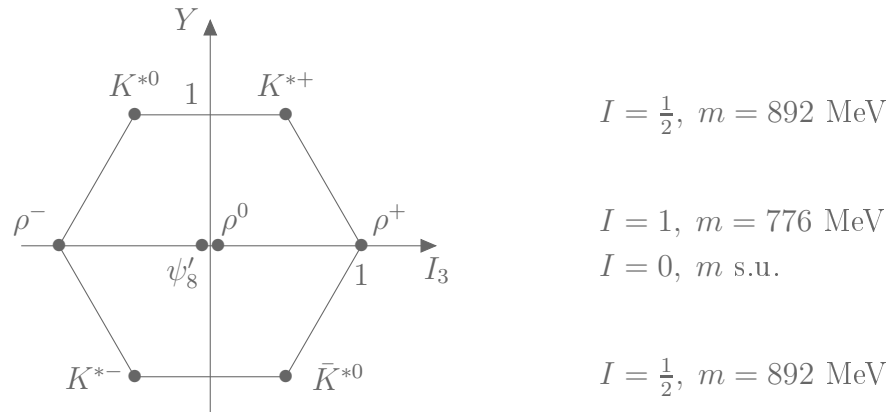
$$\begin{aligned} \eta(548 \text{ MeV}) &= \psi_8 \cos \theta - \psi_1 \sin \theta \\ \eta'(958 \text{ MeV}) &= \psi_8 \sin \theta + \psi_1 \cos \theta \end{aligned}$$

Die physikalischen Teilchen sind  $\eta$  und  $\eta'$ .  
 $\theta$  heißt Nonett-Mischungswinkel (experimentell  $\theta = -24.6^\circ$ ).



- Zusätzlich gibt es angeregte  $q\bar{q}$ -Zustände (Rotationen, Vibrationen, usw.)  
Das erste "angeregte" Mesonen-Nonett hat Quantenzahlen  $B = 0$  und  $J^P = 1^-$ .

– Vektor-Mesonen-Oktett: (Quarkinhalt wie oben)



– Vektor-Mesonen-Singulett:  $\psi'_1$  mit  $I = Y = 0$ .

Wie oben mischen  $\psi'_1$  und  $\psi'_8$ , mit  $\theta_V = 36^\circ$  (fast "ideale" Mischung):

$$\begin{aligned} \phi(1020 \text{ MeV}) &= \psi'_8 \cos \theta_V - \psi'_1 \sin \theta_V \approx s\bar{s} \\ \omega(782 \text{ MeV}) &= \psi'_8 \sin \theta_V + \psi'_1 \cos \theta_V \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \end{aligned}$$

d.h.

$$\underbrace{m_{\rho^0, \rho^+, \rho^-} \approx m_\omega}_{\text{kein s-Quark}} < \underbrace{m_{K^{*0}, K^{*+}, K^{*-}, \bar{K}^{*0}}}_{\text{ein s-Quark}} < \underbrace{m_\phi}_{\text{zwei s-Quarks}}$$

- Baryonen bestehen aus 3 Quarks. Zerlege also

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square\square\square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

bzw.

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ S}}{8} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ M_S}}{8} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ M_A}}{8} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{1}.$$

mit  $S$  = Total symmetrische Tensoren unter  $S_3$ , d.h. Vertauschungen der Quarks,  
 $M_S$  = Tensoren mit gemischter Symmetrie (symmetrisch unter Austausch der ersten beiden Quarks, ohne Beweis),

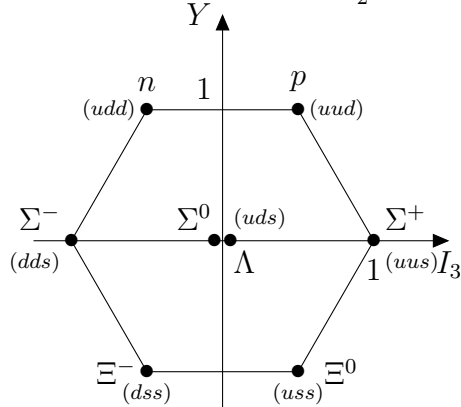
$M_A$  = Tensoren mit gemischter Symmetrie (antisymmetrisch unter Austausch der ersten beiden Quarks, ohne Beweis),

$A$  = total antisymmertische Tensoren.

Wir erwarten daher Multipletts von (annähernd) entarteten Baryonen, die aus 10, 8 oder einem Teilchen bestehen.

- Experimenteller Befund: Die leichtesten (d.h. Grundzustands-) Baryonen bilden ein Oktett und ein Dekuplett:

– Baryonen-Oktett ( $B = 1, J^P = \frac{1}{2}^+$ ):



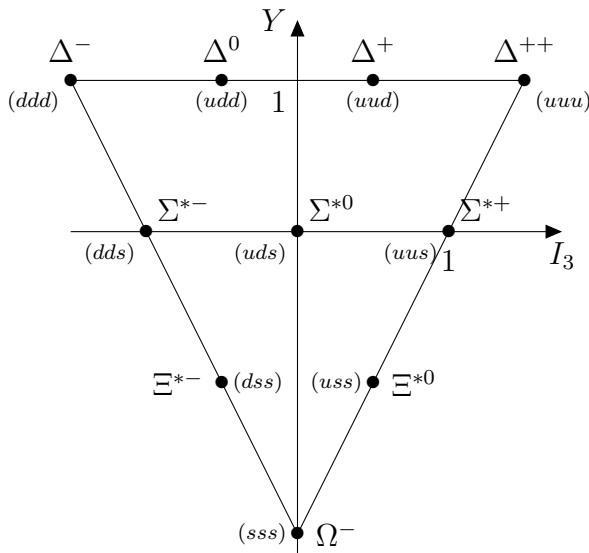
$$I = \frac{1}{2}, m = 939 \text{ MeV}$$

$$I = 1, m = 1193 \text{ MeV}$$

$$I = 0, m = 1116 \text{ MeV}$$

$$I = \frac{1}{2}, m = 1318 \text{ MeV}$$

– Baryonen-Dekuplett ( $B = 1, J^P = \frac{3}{2}^+$ ):



$$I = \frac{3}{2}, m = 1232 \text{ MeV}$$

$$I = 1, m = 1385 \text{ MeV}$$

$$I = \frac{1}{2}, m = 1530 \text{ MeV}$$

$$I = 0, m = 1672 \text{ MeV}$$

- Wo sind das Singulett und das zweite Oktett?

- Baryonen sind Fermionen, und deren Wellenfunktionen müssen total antisymmetrisch sein (in Raum, Spin, Flavor und Farbe).
- Baryonen sind Farb-Singulett, d.h. sie transformieren sich unter  $SU(3)_{\text{color}}$  in der Darstellung  $\mathbb{1}$  (triviale Darstellung von  $SU(3)_{\text{color}}$ , antisymmetrische Darstellung von  $S_3$ ).  
 $\Rightarrow$  Der Farbanteil der Wellenfunktion ist total antisymmetrisch (unter Austausch der Quarks).
- Im Grundzustand ist der Bahndrehimpuls Null, d.h. der Raumanteil der Wellenfunktion ist total symmetrisch.

⇒ der Spin-Flavor-Anteil muß total symmetrisch sein.

- Für die Spins der 3 Quarks im Baryon gilt (hier stehen die Young-Diagramme für  $SU(2)_{\text{Spin}}$ )

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \oplus \square) \otimes \square = \square \oplus \square \oplus \square = \square \oplus \square \oplus \square$$

bzw.

$$2 \otimes 2 \otimes 2 = \underset{\substack{\uparrow \\ S}}{4} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ M_S}}{2} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ M_A}}{2} \quad SU(2)_{\text{Spin}},$$

d.h. wir müssen kombinieren

$$(\underset{\substack{\uparrow \\ S}}{10} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ M_S}}{8} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ M_A}}{8} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{1})_{\text{Flavor}} \quad \text{und} \quad (\underset{\substack{\uparrow \\ S}}{4} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ M_S}}{2} \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ M_A}}{2})_{\text{Spin}}.$$

- Dies ergibt folgende Möglichkeiten für  $(SU(3), SU(2))$  Multipletts:

$$\begin{aligned} S &: (10, 4), (8, 2), \\ M_S &: (10, 2), (8, 4), (8, 2), (1, 2), \\ M_A &: (10, 2), (8, 4), (8, 2), (1, 2), \\ A &: (1, 4), (8, 2). \end{aligned}$$

Dabei entspricht z.B. das total symmetrische Oktett der Linearkombination

$$(8, 2)_S = \frac{1}{\sqrt{2}} [ \underset{\substack{\uparrow \\ M_S}}{(8, 2)} + \underset{\substack{\uparrow \\ M_A}}{(8, 2)} ],$$

u.ä. für die anderen Kombinationen.

- Nur die total symmetrischen Spin-Flavor-Multipletts  $(10, 4)$  und  $(8, 2)$  führen zu einer total antisymmetrischen Wellenfunktion des Baryons.  
 ⇒ Im Grundzustand gibt es nur das Dekuplett und ein Oktett, aber kein Singulett und kein zweites Oktett. (In angeregten Zuständen gibt es diese aber.)

- Andere Möglichkeit der Herleitung:

- Betrachte die 3 Quarks als 6 Zustände mit 3 Flavours sowie 2 Spinzuständen je Flavor.  
 ⇝ approximative  $SU(6)$  "Spin-Flavor"-Symmetrie
- Die Zerlegung in irreduzible Komponenten bezüglich  $SU(6)$  ist

$$6 \otimes 6 \otimes 6 = 56_S \oplus 70_{M_S} \oplus 70_{M_A} \oplus 20_A$$

- Die 56-dimensionale irreduzible Darstellung von  $SU(6)$  induziert eine Darstellung von  $SU(3)_{\text{Flavor}}$ . Diese ist reduzibel, und es ergibt sich

$$56_S = 10^{\frac{3}{2}} \oplus 8^{\frac{1}{2}}.$$

$\nearrow$   
 $\text{dim} = 10 \cdot 4$

$\nwarrow$   
 $\text{dim} = 8 \cdot 2$

Dies entspricht dem Baryonen-Dekuplett (Spin =  $\frac{3}{2}$ ) und dem Baryonen-Oktett (Spin =  $\frac{1}{2}$ ).

## 8.5 Gell-Mann-Okubo Formel

- Innerhalb eines  $SU(3)_{\text{Flavor}}$  Multipletts sind die Massen der Teilchen im selben Isospin-Multiplett fast gleich, aber für verschiedenes  $Y$  (bzw.  $S$ ) gibt es größere Massendifferenzen.

Grund:  $m_u \approx m_d < m_s \rightarrow SU(3)_{\text{Flavor}}$  ist gebrochen zu  $SU(2)_I \times U(1)_Y$ .

- Annahme: Der  $SU(3)$ -brechende Term ist eine kleine Störung,

$$H = H_0 + H',$$

mit  $H_0$  invariant unter  $SU(3)_{\text{Flavor}}$

$H'$  nur invariant unter  $SU(2)_I \times U(1)_Y$

- In ÜA 48 zeigen wir in Störungsrechnung:

- $H'$  transformiert sich wie der  $\psi_8$ -Zustand der Oktett-Darstellung von  $SU(3)$  (s. Kap. 8.4).
- Für die Massen der Baryonen in einem Multiplett gilt die Gell-Mann-Okubo Formel

$$m = a + bY + c \left( I(I + 1) - \frac{1}{4}Y^2 \right)$$

mit  $a, b, c = \text{konstant}$  innerhalb eines Multipletts. (In ÜA beschränken wir uns auf rechteckige Young-Diagramme, insbesondere das Dekuplett. Dann gibt es kein  $c$ .)

- Die Formel sagte für das (zu jener Zeit unbekannt)  $\Omega^-$ -Teilchen die Masse 1680 MeV voraus. Das  $\Omega^-$  wurde daraufhin gefunden, mit Masse 1672 MeV.

## 9 Darstellungen der Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Siehe auch Abschnitt 1.9 sowie ÜA 10 & 11.

### 9.1 Relativistische Kinematik / Notation

- Raumzeitpunkt: Zeit  $t$ , Ort  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ .
  - Vierervektoren  $x$ :
    - kontravariante Komponenten (obere Indizes)  $(x^\mu) = (x^0 = ct, \vec{x})$  und
    - kovariante Komponenten (untere Indizes)  $(x_\mu) = (x_0 = ct, -\vec{x})$ ,
- d.h.  $x_0 = x^0$ ,  $x_j = -x^j$ , wobei stets

griechische Indizes:  $0 \dots 3$

lateinische Indizes:  $1 \dots 3$ .

- Lorentz-Metrik:

$$\|x\|^2 = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

mit

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu}),$$

invariant unter Lorentz-Transformationen, d.h. für  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  mit  $\Lambda \in O(3, 1)$  gilt  $\|x'\|^2 = \|x\|^2$ , also

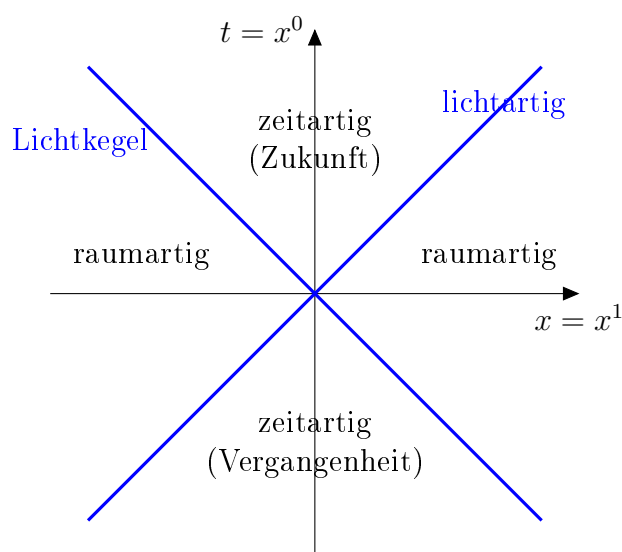
$$\begin{aligned} \|x'\|^2 &= x'^\mu g_{\mu\nu} x'^\nu \\ &= \underbrace{\Lambda^\mu{}_\rho}_{(\Lambda^T)_\rho{}^\mu} x^\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma \stackrel{!}{=} x^\rho g_{\mu\sigma} x^\sigma = \|x\|^2 \end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= g && \text{("}\Lambda \text{ lässt } g \text{ invariant")} \\ \Leftrightarrow g \Lambda^T g &= \Lambda^{-1} && \text{(vgl. mit orthogonalen Transformationen).} \end{aligned}$$

- Die Raum-Zeit zerfällt in 3 disjunkte Regionen,
  - den Zukunftskegel  $\|x\|^2 > 0$  und  $x^0 > 0$ ,
  - den Vergangenheitskegel:  $\|x\|^2 > 0$  und  $x^0 < 0$ , und
  - den Raumkegel:  $\|x\|^2 < 0$ ,

voneinander durch den Lichtkegel ( $\|x\|^2 = 0$ ) getrennt.



## 9.2 Generatoren und Lie-Algebra der Lorentzgruppe

- Betrachte zunächst eigentliche ( $\det \Lambda = 1$ ), orthochrone ( $\Lambda_{00} \geq 0$ ) Lorentz-Transformationen, d.h. die Gruppe  $L^0$ .
- Generatoren als  $4 \times 4$ -Matrizen (so wie Generatoren von  $SO(3)$  in Abschnitten 6.4 und 6.8): Drei für die Drehungen,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und drei für die Boosts (vgl. ÜA 10)

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Über Matrix-Kommutatoren finden wir die Lie-Klammern

$$\begin{aligned} [J_j, J_k] &= i\varepsilon_{jkl}J_l, \\ [J_j, K_k] &= i\varepsilon_{jkl}K_l \quad \text{und} \\ [K_j, K_k] &= -i\varepsilon_{jkl}J_l. \end{aligned}$$

(Reine Boosts alleine bilden also keine Gruppe.) Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} [J_1 \pm iK_1, J_2 \pm iK_2] &= [J_1, J_2] \pm i[J_1, K_2] \pm i[K_1, J_2] - [K_1, K_2] \\ &= iJ_3 \pm i(iK_3) \pm i(iK_3) - (-iJ_3) \\ &= 2i(J_3 \pm iK_3), \end{aligned}$$

d.h. mit den Definitionen

$$M_j = \frac{1}{2}(J_j + iK_j) \quad \text{und} \quad N_j = \frac{1}{2}(J_j - iK_j)$$

folgt

$$\begin{aligned} [M_j, M_k] &= i\varepsilon_{jkl}M_l \\ [N_j, N_k] &= i\varepsilon_{jkl}N_l \\ [M_j, N_k] &= 0 \end{aligned}$$

⇒ Die Lorentz-Gruppe  $L^0$  hat dieselbe Lie-Algebra wie  $SU(2) \times SU(2)$  (direktes Produkt, siehe Abschnitt 1.8).

### 9.3 Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentz-Gruppe

**Lemma 22.** Seien  $\Gamma^{\textcircled{1}}$  und  $\Gamma^{\textcircled{2}}$  irreduzible Darstellungen der kompakten Lie-Gruppen  $G$  und  $H$ . Dann ist  $\Gamma := \Gamma^{\textcircled{1}} \otimes \Gamma^{\textcircled{2}}$  (vgl. Abschnitt 2.8) eine irreduzible Darstellung von  $G \times H$ .

**Beweis:** Seien  $g, g' \in G$  und  $h, h' \in H$  (und damit  $(g, h), (g', h') \in G \times H$ ):

$$\begin{aligned} \Gamma(g, h)\Gamma(g', h') &= [\Gamma^{\textcircled{1}}(g) \otimes \Gamma^{\textcircled{2}}(h)][\Gamma^{\textcircled{1}}(g') \otimes \Gamma^{\textcircled{2}}(h')] \\ &= [\Gamma^{\textcircled{1}}(g)\Gamma^{\textcircled{1}}(g')] \otimes [\Gamma^{\textcircled{2}}(h)\Gamma^{\textcircled{2}}(h')] \\ &= \Gamma^{\textcircled{1}}(gg') \otimes \Gamma^{\textcircled{2}}(hh') \\ &= \Gamma(gg', hh'), \end{aligned}$$

also Darstellung. Sei  $\mu$  das Haar-Maß von  $G$  und  $\nu$  das von  $H$ , betrachte Integral über  $|\text{Charakter}|^2$  (vgl. Abschnitt 6.7):

$$\int_{G \times H} \underbrace{|\text{tr } \Gamma(g, h)|^2}_{=|\text{tr } \Gamma^{\textcircled{1}}(g)|^2 \cdot |\text{tr } \Gamma^{\textcircled{2}}(h)|^2} d\mu(g) d\nu(h) = \underbrace{\int_G |\text{tr } \Gamma^{\textcircled{1}}(g)|^2 d\mu(g)}_{=1, \text{ da irred.}} \cdot \underbrace{\int_H |\text{tr } \Gamma^{\textcircled{2}}(h)|^2 d\nu(h)}_{=1, \text{ da irred.}} = 1,$$

also irreduzibel. □

Die Lie-Algebra von  $L^0$  (eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformation) war gleich der Lie-Algebra von  $SU(2) \times SU(2)$  (vgl. auch mit dem Homomorphismus  $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L^0$ ). Wir reden hier nur von der Lie-Algebra – die beiden Gruppen, die wir dann durch exponentieren erhalten sind sehr unterschiedlich, z.B. ist  $SU(2) \times SU(2)$  kompakt,  $L^0$  aber nicht!

Darstellungen von  $L^0$ : Stelle zunächst die Lie-Algebra dar. Exponentieren liefert dann tatsächlich Darstellungen<sup>18</sup> der Gruppe (ohne Beweis). Darstellungen der Lie-Algebra erhalten wir aus Paaren von irreduziblen Darstellungen von  $\mathfrak{su}(2)$ . Kennzeichne durch  $(j_1, j_2)$  mit  $j_{1,2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Dabei sind  $(2j_1 + 1)$  und zwei  $(2j_2 + 1)$  die Dimensionen der (hermiteschen) Darstellungsmatrizen von  $M_j$  und  $N_j$ , d.h. wir erhalten  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ -dimensionale Darstellungen von  $L^0$ . Mit

$$J_j = M_j + N_j \quad \text{und} \quad K_j = -i(M_j - N_j)$$

sind die Generatoren der Boosts nicht hermitesch dargestellt. Daher erhalten wir keine unitären Darstellungen von  $L^0$  (bis auf die triviale).

Liste einige Darstellungen, und wo diese in der Physik auftauchen:

- Triviale Darstellung:  $(0, 0)$
- Spinor- oder Weyl-Darstellung:  $(0, \frac{1}{2})$  mit Dimension 2, realisiert durch  $SL(2, \mathbb{C})$ -Matrizen  $A$  (siehe Abschnitt 1.9). Die zweidimensionalen Objekte, die sich in  $(0, \frac{1}{2})$  transformieren, heißen *Spinoren*  $\xi$ .
- Konjugierte Spinor-Darstellung:  $(\frac{1}{2}, 0)$ , Dimension 2, realisiert durch  $A^*$ . In  $(\frac{1}{2}, 0)$  transformiert sich ein anderer Spinor-Typ  $\eta$ .
- Unter Paritätstransformationen (nicht  $\in L^0$ , aber in  $O(3, 1)$ ) transformieren sich diese beiden Spinor-Typen ineinander:  $\xi \leftrightarrow \eta$ . Ein Dirac-Spinor enthält beiden Typen von Spinoren:  $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  und transformiert sich in der  $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$ . Durch Anwenden von Lorentz-Boosts auf einen Dirac-Spinor kann die Dirac-Gleichung “hergeleitet” werden.
- Vierervektoren transformieren sich in der Darstellung  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .
- Antisymmetrische Tensoren 2. Stufe (6 Komponenten) transformieren sich in der Darstellung  $(1, 0) \oplus (0, 1)$ . Beispiel: Elektromagnetischer Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$ .
- Symmetrische Tensoren 2. Stufe (10 Komponenten) können zerlegt werden in die Spur (diese transformiert sich in  $(0, 0)$ ) und den spurlosen Anteil (9 Komponenten, diese transformieren sich in  $(1, 1)$ ). Beispiel: Energie-Impuls Tensor  $T_{\mu\nu}$  ( $T_{00}$  = Energie,  $T_{0i}$  = Impuls,  $T_{ii}$  = Druck,  $T_{ij}$  ( $i \neq j$ ) = Scherspannung).

Physikalische Zustände (“Teilchen”) müssen sich aber in unitären Darstellungen transformieren, da Symmetrioperationen durch unitäre Transformationen realisiert sind (sonst

---

<sup>18</sup>genauer: projektive Darstellungen (Strahldarstellungen), d.h. Darstellungen bis auf eine Phase,  $\Gamma(g)\Gamma(h) = e^{i\phi(g,h)}\Gamma(gh)$ , mit einer reellwertigen Funktion  $\phi$ , vgl. Abschnitt 6.8: Die Darstellung von  $\mathfrak{so}(3)$  mit halbzahligem  $j$  sind zwar keine Darstellungen von  $SO(3)$  aber projektive Darstellungen.



sind die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Zuständen nicht erhalten).  $\rightsquigarrow$  Konstruiere die unitären, irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe. Diese haben unendliche Dimension. Das hängt damit zusammen, dass die Poincaré-Gruppe nichtkompakt ist, und nur für kompakte Gruppen garantiert das Peter-Weyl-Theorem die endliche Dimension aller unitären, irreduziblen Darstellungen.

## 9.4 Die Poincaré-Gruppe

Lorentz-Transformationen lassen  $\|x\|^2$  invariant.  $\|x\|^2$  ist auch invariant unter  $(\mathbb{R}^4, +)$ , Translationen in Raum und Zeit,

$$\mathbb{R}^4 \ni a^\mu : x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + a^\mu .$$

Die Poincaré-Gruppe (auch inhomogene Lorentz-Gruppe) ist die Gruppe aller Lorentz-Transformationen und Raum-Zeit-Translationen,  $\Lambda \in \text{O}(3, 1)$ ,  $a \in \mathbb{R}^4$ ,

$$(\Lambda, a) : x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu ,$$

kurz:  $(\Lambda, a)x = \Lambda x + a$ .

Überprüfe, dass das eine Gruppe ist:

- Abgeschlossenheit:

$$(\Lambda', a')(\Lambda, a)x = (\Lambda', a')(\Lambda x + a) = \underbrace{\Lambda' \Lambda}_{\in \text{O}(3,1)} x + \underbrace{\Lambda' a + a'}_{\in \mathbb{R}^4} = (\Lambda' \Lambda, \Lambda' a + a')x .$$

Wir lesen ab:  $(\Lambda, a) = (\mathbb{1}, a)(\Lambda, 0)$ .

- Identität:  $(\mathbb{1}, 0)$ .
- Inverses:

$$(\Lambda, a)^{-1} = ((\mathbb{1}, a)(\Lambda, 0))^{-1} = (\Lambda, 0)^{-1}(\mathbb{1}, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, 0)(\mathbb{1}, -a) = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) .$$

Eine derartige Gruppenmultiplikation auf dem euklidischen Produkt zweier Gruppen, hier  $\text{O}(3, 1)$  und  $\mathbb{R}^4$ , nennt man ein *semi-direktes Produkt*, Symbol  $\rtimes$ , d.h. die Poincaré-Gruppe ist  $\mathbb{R}^4 \rtimes \text{O}(3, 1)$ .<sup>19</sup> Dabei operiert  $\text{O}(3, 1)$  auf  $\mathbb{R}^4$  und zwar derart, dass es die Gruppenstruktur von  $\mathbb{R}^4$  erhält. Im semi-direkten Produkt  $H \rtimes G$  ist stets  $H$  eine invariante Untergruppe, hier also  $\mathbb{R}^4$  – explizit:

$$\begin{aligned} (\Lambda, a) \underbrace{(\mathbb{1}, b)}_{\in \mathbb{R}^4} (\Lambda, a)^{-1} &= (\Lambda, \Lambda b + a)(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \\ &= (\mathbb{1}, \Lambda(-\Lambda^{-1}a) + \Lambda b + a) \\ &= (\mathbb{1}, \Lambda b) \in \mathbb{R}^4 \quad \forall (\Lambda, a) \in \mathbb{R}^4 \rtimes \text{O}(3, 1) . \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Das ist die übliche Notation, ich notiere in den Elementen trotzdem die Lorentztransformation vorne.

Die Poincaré-Gruppe ist die Symmetriegruppe der Raumzeit (der speziellen Relativitätstheorie)  $\rightsquigarrow$  Physikalische Zustände (“Teilchen”) transformieren sich in unitären irreduziblen Darstellungen von  $\mathbb{R}^4 \rtimes O(3, 1)$ . (Die Wellengleichungen sind invariant unter Lorentz-Trafos und Translationen  $\rightsquigarrow$  Lösungen lassen sich nach unitären irreduziblen Darstellungen klassifizieren.)

Für die *Physik* ist das Folgende ein Grundpfeiler der relativistischen Quantenfeldtheorie. In der *Mathematik* eröffnet es das Gebiet der induzierten Darstellungen. Beides wurde initiiert durch E. P. Wigner, *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, Ann. Math. **40** (1939) 149–204.

## 9.5 Generatoren und Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe

Die Poincaré-Gruppe hat 10 Generatoren, 4 für die Translationen und 6 für die Lorentz-Transformationen. Die Generatoren der Translationen können wir nicht wie die anderen in Abschnitt 9.2 als  $4 \times 4$ -Matrizen darstellen – arbeite stattdessen mit den  $O_A$ -Operatoren (wie am Ende von Abschnitt 6.4),

$$(O_{(\Lambda, a)}\psi)(x) = \psi((\Lambda, a)^{-1}x) = \psi(\Lambda^{-1}x - \Lambda^{-1}a)$$

Generator einer Translation in  $\mu$ -Richtung:

$$-i \frac{\partial}{\partial a^\mu} (O_{(\mathbb{1}, a^\mu)}\psi)(x) \Big|_{a=0} = -i \frac{\partial}{\partial a^\mu} \psi(x - a) \Big|_{a=0} = i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^\mu}}_{=: P_\mu} \psi(x)$$

Die Generatoren der Drehungen haben wir bereits am Ende von Abschnitt 6.4 bestimmt, z.B.

$$J_z = -i \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{für Drehungen um die } z\text{-Achse.}$$

Analog bestimmt man die der Boosts, z.B. ( $c = 1$ )

$$K_x = i \left( t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad \text{für Boosts in } x\text{-Richtung.}$$

Zusammengefasst in kovarianter Schreibweise:

$$P_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

$$J_{\mu\nu} = i \left( x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} J_{0i} = -J_{i0} = K_i \\ J_{ij} = -J_{ji} = \varepsilon_{ijk} J_k \end{cases}$$

Daraus folgt die Lie-Algebra

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \quad (\mu, \nu = 0, \dots, 3), \\ [P_\mu, J_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\rho} P_\sigma - g_{\mu\sigma} P_\rho), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= i(g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}). \end{aligned}$$

Aufgeschlüsselt nach Rotationen und Boosts:

$$\begin{aligned}
 [P_0, J_i] &= 0 \quad (i = 1, \dots, 3), \\
 [P_0, K_i] &= iP_i, \\
 [P_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}P_k, \\
 [P_i, K_j] &= i\delta_{ij}P_0, \\
 [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k, \\
 [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k, \\
 [K_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k.
 \end{aligned}$$

⇒ Die Translationen bilden eine (abelsche) Untergruppe.

Die Rotationen bilden eine Untergruppe.

Die reinen Boosts bilden keine Untergruppe.

Rotationen plus Boosts bilden die Lorentz-Gruppe  $L^0$  (eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen).

## 9.6 Unitäre irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe

Wie Abschnitt 9.5 vorbereitet, gehen wir den Umweg über die Generatoren, d.h. wir konstruieren unitäre, irreduzible Darstellungen für  $\mathbb{R}^4 \times L^0$  (eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen und Raum-Zeit-Translationen) – Parität und Zeitumkehr müssten dann noch gesondert betrachtet werden (z.B. wie in Tung Kap. 11 & 12).

Im Folgenden betrachten wir die Wirkung der Poincaré-Gruppe auf einem Hilbertraum. Wir werden sehen:

- Die unitären irreduziblen Darstellungen sind durch zwei Parameter gekennzeichnet. Physikalisch haben diese die Bedeutung von Masse und Spin (bzw. Helizität), d.h. sie kennzeichnen den beschriebenen Teilchentyp.
- Die Basiszustände der irreduziblen Darstellungen entsprechen für einen gegebenen Teilchentyp den möglichen Zuständen (gekennzeichnet durch Viererimpuls und Spinprojektion).

### 9.6.1 Erster Casimir-Operator und Wirkungen von $a$ und $\Lambda$

In einer irreduziblen Darstellung wird ein Casimir-Operator als Vielfaches der Eins dargestellt (vgl. Abschnitt 6.10 – folgt aus dem Schur'schen Lemma). Kennzeichne daher irreduzible Darstellungen durch Eigenwerte von Casimir-Operatoren.

Innerhalb einer irreduziblen Darstellung kann man die Zustände durch die Eigenwerte kommutierender Generatoren kennzeichnen. Wegen  $[P^\mu, P^\nu] = 0$  führen wir Basisvektoren  $|p, \sigma\rangle$  mit

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle$$

ein. Dabei steht  $\sigma$  für alle anderen Parameter, die nötig sind, um einen Zustand eindeutig zu kennzeichnen. Physikalisch hat  $p^\mu$  die Bedeutung des Viererimpulses.

Ein Casimir-Operator der Poincaré-Gruppe ist  $C_1 = P^\mu P_\mu$ , denn  $[P^\mu P_\mu, P_\nu] = 0$  und

$$\begin{aligned} [P^\mu P_\mu, J_{\rho\sigma}] &= g^{\mu\nu} [P_\nu P_\mu, J_{\rho\sigma}] \\ &= g^{\mu\nu} P_\nu [P_\mu, J_{\rho\sigma}] + g^{\mu\nu} [P_\nu, J_{\rho\sigma}] P_\mu \\ &= g^{\mu\nu} P_\nu i(g_{\mu\rho} P_\sigma - g_{\mu\sigma} P_\rho) + g^{\mu\nu} i(g_{\nu\rho} P_\sigma - g_{\nu\sigma} P_\rho) P_\mu \\ &= P^\mu i(g_{\mu\rho} P_\sigma - g_{\mu\sigma} P_\rho) + i(g_{\nu\rho} P_\sigma - g_{\nu\sigma} P_\rho) P^\nu \\ &= i(P_\rho P_\sigma - P_\sigma P_\rho + P_\sigma P_\rho - P_\rho P_\sigma) = 0. \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$C_1 |p, \sigma\rangle = p^\mu p_\mu |p, \sigma\rangle = ((p^0)^2 - |\vec{p}|^2) |p, \sigma\rangle = (E^2 - |\vec{p}|^2) |p, \sigma\rangle = m^2 |p, \sigma\rangle.$$

(Hier wurde wie die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  gesetzt.) Physikalisch ist  $m$  die Ruhemasse (des beschriebenen Teilchens). Irreduzible Darstellungen von  $\mathbb{R}^4 \rtimes L^0$  können also (u.a.) durch  $m$  gekennzeichnet werden.

Seien

$$T(a) = e^{-ia_\mu P^\mu} \quad \text{und} \quad U(\Lambda)$$

unitäre Darstellungen (auf dem durch die  $|p, \sigma\rangle$  aufgespannten Raum – reduzibel), dann gilt

$$T(a) |p, \sigma\rangle = e^{-ia_\mu P^\mu} |p, \sigma\rangle = e^{-ia_\mu p^\mu} |p, \sigma\rangle$$

(eindimensionale unitäre Darstellung, da  $\mathbb{R}^4$  abelsch).

Wirkung reiner Lorentz-Transformationen? Wenn wir die kennen, dann können wir auch Poincaré-Transformationen zusammensetzen, da  $(\Lambda, a) = (\mathbb{1}, a)(\Lambda, 0)$ , vgl. Abschnitt 9.4. Betrachte  $T(a)U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$ . Wegen

$$(\Lambda, 0)(\mathbb{1}, b)(\Lambda^{-1}, 0) = (\mathbb{1}, \Lambda b)$$

(siehe Abschnitt 9.4) gilt mit  $b = \Lambda^{-1}a$

$$U(\Lambda)T(\Lambda^{-1}a)U(\Lambda^{-1}) = T(a),$$

d.h.

$$T(a)U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = U(\Lambda)T(\Lambda^{-1}a)|p, \sigma\rangle = U(\Lambda)e^{-i(\Lambda^{-1}a)_\mu p^\mu} |p, \sigma\rangle = e^{-ia_\mu (\Lambda p)^\mu} U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$$

und lese ab

$$P^\mu U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = (\Lambda p)^\mu U(\Lambda)|p, \sigma\rangle,$$

d.h.  $U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$  ist eine Linearkombination von Zuständen mit Viererimpuls  $p' = \Lambda p$ ,

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} |\Lambda p, \sigma'\rangle D(\Lambda, p)_{\sigma'\sigma}. \quad (*)$$

Damit definiert  $D(\Lambda, p)_{\sigma'\sigma}$  (noch genauer zu bestimmen!) eine unitäre Darstellung der Poincaré-Gruppe. (Zunächst reduzibel, da noch “zu viele” verschiedene  $p$  vorkommen.)

**Idee:**

- Starte mit *einem*  $p$ .
- Wende beliebige  $U(\Lambda)$  an. Welche  $p$  kommen noch vor?
- Sammle alle auftretenden  $|p, \sigma\rangle$ . Diese spannen einen irreduziblen Unterraum auf.

In Abschnitt 6.8 sind wir ähnlich verfahren, nur haben wir dort nicht die Wirkung der Gruppenelemente sondern der Generatoren betrachtet.

### 9.6.2 Kleine Gruppe und induzierte Darstellungen

Viererimpulse  $p^\mu$  fallen in folgende Kategorien:

(Die Bedeutung der Spalten 2 und 3 wird gleich erklärt)

Kategorie	Standardvektor ( $k^\mu$ )	Kleine Gruppe
1. $p_\mu p^\mu = m^2 > 0, p^0 > 0$ massive Teilchen	$(m, 0, 0, 0)$	SO(3)
2. $p_\mu p^\mu = m^2 > 0, p^0 < 0$	$(-m, 0, 0, 0)$	SO(3)
3. $p_\mu p^\mu = 0, p^0 > 0$ masselose Teilchen	$(\omega, 0, 0, \omega)$	SE(2)
4. $p_\mu p^\mu = 0, p^0 < 0$	$(-\omega, 0, 0, \omega)$	SE(2)
5. $p_\mu p^\mu < 0$ Tachyonen	$(0, 0, 0, \omega)$	SO(2,1)
6. $p^\mu \equiv 0$ Vakuum	$(0, 0, 0, 0)$	$L^0$

Die Fälle 2, 4 und 5 kommen in der Natur vermutlich nicht vor.

- Innerhalb einer Kategorie kann man für festes  $p_\mu p^\mu$  ein beliebiges ( $p^\mu$ ) durch eine Lorentz-Transformation  $L$  aus einem gemeinsamen “Standardvektor” ( $k^\mu$ ) erhalten: (Andere nicht, denn eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen lassen  $p_\mu p^\mu$  und das Vorzeichen von  $p^0$  invariant.)

$$p^\mu = L(p)^\mu{}_\nu k^\nu \quad \text{oder kurz} \quad p = L(p)k.$$

Die Zustände mit Viererimpuls ( $p^\mu$ ) werden nun *definiert* durch

$$|p, \sigma\rangle := U(L(p))|k, \sigma\rangle.$$

(Die Operatoren  $U$  sind immer noch unbekannt.)

- Die Menge aller Lorentz-Transformationen  $A$ , die ein gegebenes ( $p^\mu$ ) invariant lassen, d.h.

$$A^\mu{}_\nu p^\nu = p^\mu \quad \text{oder kurz} \quad Ap = p$$

ist eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe  $L^0$  (und damit der Poincaré-Gruppe), die sogenannte *kleine Gruppe* von ( $p^\mu$ ). (Standgruppe von ( $p^\mu$ ) der Wirkung von  $L^0$  auf der Raumzeit, vgl. Abschnitt 1.5.)

- Kleine Gruppe für die Standardvektoren: Tabelle (SE(2)) diskutieren wir in Abschnitt 9.6.5.)

Innerhalb einer Kategorie sind die kleinen Gruppen für verschiedene ( $p^\mu$ ) zueinander konjugiert, also insbesondere isomorph, denn mit  $p = L(p)k$  gilt

$$\Lambda k = k \quad \Leftrightarrow \quad L(p)\Lambda L(p)^{-1} \underbrace{L(p)k}_{=p} = \underbrace{L(p)k}_{=p} .$$

Betrachte nun die Wirkung einer beliebigen Lorentz-Transformationen  $\Lambda$  (mit  $p' = \Lambda p$ ) auf  $|p, \sigma\rangle$ ,

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= U(\Lambda) U(L(p)) |k, \sigma\rangle \\ &= U(\Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \\ &= U(L(p')) U(L(p'))^{-1} U(\Lambda L(p)) |k, \sigma\rangle \\ &= U(L(p')) U(L(p'))^{-1} \Lambda L(p) |k, \sigma\rangle . \end{aligned}$$

$L(p')^{-1} \Lambda L(p)$  läßt  $k$  invariant,

$$L(p')^{-1} \Lambda \underbrace{L(p)k}_{=p} = L(p')^{-1} \underbrace{\Lambda p}_{=p'} = L(p')^{-1} p' = k ,$$

d.h.  $A(\Lambda, p) := L(\Lambda p)^{-1} \Lambda L(p)$  ist ein Element der kleinen Gruppe von  $k$ , und damit gilt

$$U(A) |k, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} |k, \sigma'\rangle D(A)_{\sigma'\sigma} .$$

Jede unitäre irreduzible Darstellung der kleinen Gruppe *induziert* nun eine unitäre irreduzible Darstellung der Poincaré-Gruppe durch

$$\begin{aligned} U(\Lambda) |p, \sigma\rangle &= U(L(p')) U(A) |k, \sigma\rangle \\ &= \sum_{\sigma'} U(L(p')) |k, \sigma'\rangle D(A)_{\sigma'\sigma} \\ &= \sum_{\sigma'} |p', \sigma'\rangle D(A(\Lambda, p))_{\sigma'\sigma} , \end{aligned}$$

d.h.  $U(\Lambda)$  ist bekannt, sobald man die Darstellung der kleinen Gruppe festgelegt hat. Vergleiche dazu mit (\*) in Kap. 9.6.1.

**Bemerkung:**

1. Im Allgemeinen induzieren irreduzible Darstellungen einer Untergruppe reduzierbare Darstellungen der Gruppe. Die von irreduziblen Darstellungen der kleinen Gruppe induzierten Darstellungen der Poincaré-Gruppe sind aber wieder irreduzibel, denn man geht von einem einzigen Startvektor  $k$  aus und erzeugt alle Basiszustände einer irreduziblen Darstellung der Poincaré-Gruppe durch Anwendung der Gruppenoperatoren.

2. Wir sehen bereits hier, dass die irreduziblen Darstellungen der Kategorie 1, (physikalisch: massive Teilchen) durch die zwei Parameter  $m$  (physikalisch: Masse) und  $s$  (physikalisch: Spin) gekennzeichnet werden können, wobei  $2s + 1$  die Dimension der unitären irreduziblen Darstellung<sup>20</sup> der kleinen Gruppe  $SO(3)$  ist.

### 9.6.3 Zweiter Casimir-Operator und Lie-Algebra der kleinen Gruppe

Ein zweiter Casimir-Operator der Poincaré-Gruppe ist

$$C_2 = W_\mu W^\mu$$

mit dem Pauli-Lubanski-(Pseudo-)Vektor

$$W^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma$$

(mit der total Antisymmetrischen Einheit  $\varepsilon$ ).

**Eigenschaften:**

- (i)  $W^\mu P_\mu = 0$
- (ii)  $[W_\mu, P_\nu] = 0$
- (iii)  $[W_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho} W_\sigma - g_{\mu\sigma} W_\rho)$
- (iv)  $[W_\mu, W_\nu] = i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\rho P_\sigma$

**Beweise:** Nachrechnen.

$W_\mu W^\mu$  ist ein Casimir-Operator, denn (a)  $W_\mu W^\mu$  kommutiert mit  $P_\nu$  wegen (ii) und (b)  $W_\mu W^\mu$  ist ein Lorentz-Skalar, kommutiert also mit  $J_{\rho\sigma}$ .

Angewandt auf  $|p, \sigma\rangle$  können wir  $P_\nu$  durch  $p_\nu$  ersetzen: Die  $W_\mu$  sind dann  $\in \mathfrak{so}(3, 1)$  (offensichtlich, da Linearkombinationen der  $J_{\rho\sigma}$ ) und erzeugen Elemente der kleinen Gruppe, denn einerseits

$$\begin{aligned} P^\nu e^{-i\theta_\mu W^\mu} |p, \sigma\rangle &= P^\nu e^{-\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \theta_\mu J_{\alpha\beta} P_\gamma} |p, \sigma\rangle = P^\nu \underbrace{e^{-\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \theta_\mu J_{\alpha\beta} p_\gamma}}_{=U(\Lambda)} |p, \sigma\rangle \\ &= (\Lambda p)^\nu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle \quad (\text{vgl. Abschnitt 9.6.1}) \\ &= (\Lambda p)^\nu e^{-i\theta_\mu W^\mu} |p, \sigma\rangle \end{aligned}$$

und andererseits

$$P^\nu e^{-i\theta_\mu W^\mu} |p, \sigma\rangle \stackrel{(ii)}{=} e^{-i\theta_\mu W^\mu} P^\nu |p, \sigma\rangle = e^{-i\theta_\mu W^\mu} p^\nu |p, \sigma\rangle = p^\nu e^{-i\theta_\mu W^\mu} |p, \sigma\rangle$$

also  $p = \Lambda p$ .

---

<sup>20</sup>genauer: projektive Darstellung bzw. Strahldarstellung, vgl. Abschnitt 9.3.

### 9.6.4 Massive Teilchen

- Fall 1 aus Abschnitt 9.6.2
- Standardvektor  $(k^\mu) = (m, 0, 0, 0)$ .
- $W^\mu |k, \sigma\rangle = \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho 0} J_{\nu\rho} |k, \sigma\rangle$ , d.h.

$$W^0 |k, \sigma\rangle = 0 \quad \text{und} \quad W^j |k, \sigma\rangle = \frac{m}{2} \varepsilon^{jkl} J_{kl} |k, \sigma\rangle = m J^j |k, \sigma\rangle.$$

Hier sieht man explizit die Lie-Algebra  $\mathfrak{so}(3)$  bzw.  $\mathfrak{su}(2)$  der kleinen Gruppe. Weiter gilt

$$C_2 |k, \sigma\rangle = ((W^0)^2 - \vec{W}^2) |k, \sigma\rangle = -m^2 \vec{J}^2 |k, \sigma\rangle = -m^2 s(s+1) |k, \sigma\rangle.$$

Diese irreduziblen unitären Darstellungen der Poincaré-Gruppe sind gekennzeichnet durch zwei Parameter: *Masse*  $m$  und *Spin*  $s$  (welche sich aus den Eigenwerten  $m^2$  und  $-m^2 s(s+1)$  der Casimir-Operatoren ergeben).

- Betrachte nun ein beliebiges zeitartiges  $(p^\mu)$ . Es gilt

$$W^0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{0\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma = \frac{1}{2} \varepsilon^{jkl} J_{jk} P_l = J^l P_l = -\vec{J}\vec{P},$$

und weiter  $W^0 |p, \sigma\rangle = -\vec{J}\vec{p} |p, \sigma\rangle$ . Kennzeichne die Zustände innerhalb eines irreduziblen Unterraums (außer Ruhesystem) durch den Eigenwert  $\vec{p}$  von  $\vec{P}$  (*Impuls*) und den Eigenwert von  $\frac{\vec{J}\vec{p}}{|\vec{p}|}$  (*Helizität*). (Abgeleitet aus den Eigenwerten der kommutierenden Operatoren  $\vec{P}$  und  $\vec{J}\vec{P}$ .) Die Helizität ist die Spin-Projektion in Bewegungsrichtung und nimmt die Werte  $-s, \dots, s$  an.

### 9.6.5 Masselose Teilchen

- Fall 3 aus Abschnitt 9.6.2
- Standardvektor  $(k^\mu) = (\omega, 0, 0, \omega)$ .
- Die Generatoren der kleinen Gruppe ergeben sich wieder aus dem Pauli-Lubanski-Vektor:

$$\begin{aligned} W^0 |k, \sigma\rangle &= \omega J_3 |k, \sigma\rangle \\ W^3 |k, \sigma\rangle &= \omega J_3 |k, \sigma\rangle \\ W_1 |k, \sigma\rangle &= \omega (J_{23} + J_{20}) |k, \sigma\rangle = \omega \overbrace{(J_1 + K_2)}{=:A} |k, \sigma\rangle \\ W_2 |k, \sigma\rangle &= \omega (J_{31} - J_{10}) |k, \sigma\rangle = \omega \overbrace{(J_2 - K_1)}{=:B} |k, \sigma\rangle \end{aligned}$$



Casimir-Operator:  $C_2 = W_\mu W^\mu = -\omega(A^2 + B^2)$ . Die Lie-Algebra,

$$[A, B] = 0, \quad [A, J_3] = -iB, \quad [B, J_3] = iA,$$

ist die der SE(2), der euklidischen Gruppe in zwei Dimensionen (Translationen erzeugt durch  $A$  und  $B$  und Drehungen erzeugt durch  $J_3$ ). SE(2) =  $\mathbb{R}^2 \rtimes \text{SO}(2)$  ist selbst ein semi-direktes Produkt, dessen unitäre, irreduzible Darstellungen mit der Methode der induzierten Darstellungen konstruiert werden können. Man findet:

- (i) Unendlichdimensionale Darstellungen falls der Eigenwert von  $C_2 \neq 0$  (wohl nicht in der Natur realisiert).
  - (ii) Eindimensionale Darstellungen (falls der Eigenwert von  $C_2 = 0$ ), gekennzeichnet durch den Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  von  $J_3$ .<sup>21</sup> (Wieder *Helizität*, denn mit  $(k^\mu) = (\omega, 0, 0, \omega)$  ist  $\vec{J}\vec{k}/|\vec{k}| = J_3$ .)
- Kennzeichne im Fall (ii) die unitären, irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe durch  $m$  und  $\lambda$ , die Zustände durch  $\vec{p}$  (Das  $\sigma$  brauchen wir nicht mehr, da die Darstellungen eindimensional sind – dafür wird das  $\lambda$  gerne mit in das  $|\ \rangle$  geschrieben.) In der Natur realisiert durch Neutrinos ( $\lambda = -\frac{1}{2}$ ) und Anti-Neutrinos ( $\lambda = \frac{1}{2}$ ) – nur für *masselose* Neutrinos!
  - Unter Parität werden Zustände mit Helizität  $\lambda$  auf Zustände mit Helizität  $-\lambda$  abgebildet. Masselose Teilchen, die an paritätserhaltenden Wechselwirkungen beteiligt sind (alle außer schwacher WW), müssen sich dann in der direkten Summe von Darstellungen mit Helizität  $\pm\lambda$  transformieren. In der Natur realisiert durch das Photon mit Helizität  $\pm 1$  (und hypothetisch durch das Graviton mit Helizität  $\pm 2$ ).

---

<sup>21</sup>genauer: Für Darstellungen von SO(2) wäre  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , siehe Abschnitt 6.2, aber für Strahldarstellungen gibt es zunächst keine solche Einschränkung. Warum dann in der Natur nur  $\lambda \in \mathbb{Z}/2$  auftritt ist etwas komplizierter...