

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 17.12.2010)

Aufgabe 45

(10 Punkte)

- a) Bestimmen Sie für alle Vektorräume aus Aufgabe 41 b-f die Dimension, und geben Sie jeweils eine Basis an.
b) Seien U und V Unterräume des \mathbb{R}^{10} mit $\dim U = 5$ und $\dim V = 6$ und Basen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_5$ von U und $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_6$ von V . Welche Werte kann

$$\dim \text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_5, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_6)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an!

Aufgabe 46

(10 Punkte)

Welche Dimension hat der durch die folgenden Vektoren aufgespannte Unterraum des \mathbb{R}^5 ,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 47

(10 Punkte)

$V := \text{span}(1, \sin(x), \sin(2x))$ ist ein Unterraum von $C([-\pi, \pi])$ mit $\dim V = 3$ (vgl. Aufgabe 43). Sei $L : V \rightarrow V$ definiert durch $L(f) = f'' + f$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 := \{g \in V \mid \exists f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V ? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 48

(10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird!

$$\text{a) } V = \mathbb{R}^n, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^n a_j b_j \quad \text{b) } V = \mathbb{R}^3, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 3a_3 b_3$$

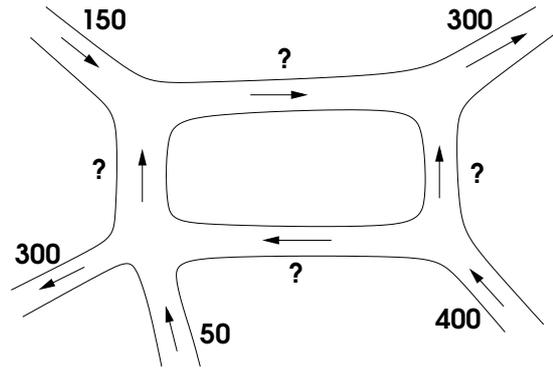
$$\text{c) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2 \quad \text{d) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$$

$$\text{e) } V = \mathbb{R}^2, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 5a_2 b_2$$

HINWEIS: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig zeigen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.

Aufgabe 49 (10 Punkte)

Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahl Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Straßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede, der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

HINWEIS: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Straßen im Uhrzeigersinn mit x_1, \dots, x_4 beginnend mit der unteren.