Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 10/11
Sebastian Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 14.01.2011)

Aufgabe 50 (10 Zusatzpunkte)

Seien $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Das lineare Gleichungssystem

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b} \qquad x_j \in \mathbb{R} \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

wird durch

$$\vec{x} = \frac{1}{|\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3|} \begin{pmatrix} |\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3| \\ |\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3| \\ |\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}| \end{pmatrix}$$

gelöst. Dabei ist $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$ das Spatprodukt.

Aufgabe 51 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U \subset \mathbb{R}^4$,

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 48 e). Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 52 (10 Punkte)

a) Die Lösungsmenge des folgenden LGS ist eine Ebene E_1 im $\mathbb{R}^3$,

$$-3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 7\,.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung sowie die Hessesche Normalform dieser Ebene an. Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?

b) Die Ebene E_2 im $\mathbb{R}^3$ ist durch

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

definiert. Geben Sie die Hessesche Normalform dieser Ebene an und berechnen Sie die Schnittmenge von E_2 mit E_1.

Aufgabe 53 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (i) eine ONB des $\mathbb{R}^3$ und (ii) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t))\,\cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t))\,\sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

Aufgabe 54 (10 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie jeweils die Geschwindigkeit sowie deren Betrag:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos t \\ (2+\cos t)\sin t \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Zeichnen Sie auch $\dot{\vec{y}}(0)$, $\dot{\vec{y}}(\frac{\pi}{2})$, und $\dot{\vec{y}}(\frac{3\pi}{2})$ als Tangentialvektoren ein.

Aufgabe 55 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Polardarstellung der folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$:

a) $(5, 3)$ b) $(3, -2)$ c) $(-2, 7)$ d) $(-4, -2)$

Geben Sie die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an:

e) $(\mathrm{e}, 0, 0)$ f) $(0, 2, 0)$ g) $(1, 1, 0)$ h) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!