Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Sebastian Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 10/11

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 03.12.2010)

Aufgabe 36 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen der Funktionen (ggf. stetig fortgesetzt)

a) $\dfrac{1}{(4+3x)^2}$ b) $\dfrac{\cos(x)-1}{x}$ c) $\dfrac{1}{(1+x)(4x-1)}$ d) $\dfrac{\cos x}{1+x^2}$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+2x^2}}{1-ax^4}\mathrm{e}^{-bx^2}$$

bei Null eine Maximum, für welche ein Minimum? Belegen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Taylorentwicklung der einzelnen Faktoren!

Aufgabe 38 (10 Punkte)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 + 4 + x + x|x|}{x}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 39 (10 Punkte)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ fest gegeben. Zeigen Sie:
Die Menge der bijektiven Abbildungen $f : (a, b) \to (a, b)$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \ \forall\, x \in (a, b)$) eine Gruppe; diese Gruppe ist nicht abelsch.

b) Zeigen Sie: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, d.h. die komplexen Zahlen, mit der üblichen Addition und Multiplikation, ist ein Körper.

(bitte wenden)

Aufgabe 40 (10 Punkte)

a) Sei $(\{1, A, B\}, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Füllen Sie die folgende Multiplikationstabelle aus.

$\cdot$	1	A	B
1			
A			
B			

Begründen Sie, warum es nur eine Lösung (also nur eine dreielementige Gruppe) gibt.

b) Ergänzen Sie die folgende Additionstabelle so, daß $(\{0, 1, A, B\}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

$+$	0	1	A	B
0		1	A	B
1		0	B	
A				1
B				

c) $(\{0, 1, A, B\}, +, \cdot)$ mit den Additions- und Multiplikations-Tabellen aus den Aufgabenteilen a) und b) ist ein Körper (genannt $\mathbb{F}_4$). Überprüfen Sie explizit das Distributivgesetz am Beispiel $(A + 1) \cdot B = A \cdot B + 1 \cdot B$.