Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 10/11
Sebastian Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 2 (Abgabe am 22.10.2010 **vor** der Vorlesung)

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Berechnen Sie $(1-\mathrm{i})^{2010}$.
Hinweis: Denken Sie an die Polardarstellung für komplexe Zahlen.

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion):

a)
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

b) Die Summe der ersten n positiven ungeraden Zahlen ist gleich n^2.
Hinweise: Formulieren Sie die Aussagen zunächst mit der Summenschreibweise.
Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $2n$ gerade und $2n+1$ ungerade.

Aufgabe 8 (10 Punkte)
Sei $a_0 = 5$ sowie $a_{n+1} = 3a_n + 2$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion):

$$a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
Wird ein Kreis durch n Sekanten in Teilgebiete zerlegt, so läßt er sich mit 2 Farben so einfärben, dass benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben.
Hinweis: "Benachbart" bedeutet hier, dass die Gebiete entlang einer Strecke aneinanderstoßen (also nicht nur in einem Punkt).

Aufgabe 10 (10 Punkte)
Berechnen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} x^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{k+n}$ c) $\displaystyle(x-y)\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}\, y^{k-1}$