Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 10/11
Sebastian Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe am 05.11.2010 **vor** der Vorlesung)

Aufgabe 15 (10 Punkte)
Bestimmen Sie (falls existent) die folgenden Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n-1} \left(\frac{n^3+n^2+2}{n^2} - 2n \right) \right)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-5\sqrt{n}} \right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{7x^3-2x^2+x}{3x^3-5x}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3-2x^2+x}{3x^3-5x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

Aufgabe 16 (10 Punkte)
Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon)$, so dass

$$|x^2 - 16| < \varepsilon \qquad \forall\, x \text{ mit } |x-4| < \delta(\varepsilon)\,,$$

d.h. geben Sie ein geeignetes $\delta(\varepsilon)$ explizit an.

Aufgabe 17 (10 Punkte)
Wo sind die folgenden Funktionen stetig, stetig fortsetzbar (und wie?) bzw. unstetig?

a) $f(x) = \frac{7x^3-2x^2+x}{3x^3-5x}$ b) $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{x^3-8}{(x+1)(x-2)}$

Aufgabe 18 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \frac{7x^3-2x^2+x}{3x^3-5x}$ b) $f(x) = \frac{x^3-8}{(x+1)(x-2)}$ c) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{x+3}$

Aufgabe 19 (10 Punkte)
Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} \sum\limits_{\mu=\nu}^{n} \frac{1}{\mu+1}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{5} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} \frac{x^\mu}{n-\mu+1}$

Aufgabe 20 (10 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\big(f(x)g(x)\big)^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} f^{(\nu)}(x)\, g^{(n-\nu)}(x)\,.$$

Dabei ist $f^{(k)}(x)$ die $k$te Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x, d.h. $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ etc.
Hinweis: Führen Sie eine vollständige Induktion nach n durch, und werfen Sie eine Blick auf den Beweis der Binomischen Formel (Satz 1).