Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 10/11
Sebastian Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 19.11.2010)

Aufgabe 26 (10 Punkte)
Die Hyperbelfunktionen sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

a) Für welche x sind die Funktionen definiert?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Aufgabe 27 (10 Punkte)
Berechnen Sie jeweils die Ableitung von
a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$.
Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun $\sinh, \cosh$ und $\tanh$.

Aufgabe 28 (10 Punkte)
Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die Funktionen
a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$.
streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh, d.h. $\operatorname{Arsinh}(\sinh(x)) = x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für
a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$
an. Bei a) und c) ist dies eindeutig – bei b) sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ und von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$.

Aufgabe 29 (10 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 6 die Ableitungen von
a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$.
(Sie benötigen dazu keine explizite Darstellung der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 27.)

Aufgabe 30 (10 Punkte)
Berechnen Sie nun auch explizit die Umkehrfunktion von $\sinh x$.
Ergebnis: $\operatorname{Arsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$