

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 26.11.2010)

Aufgabe 31

(10 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

- a) $f_1(x) := 11^x$, b) $f_2 := g \circ f \circ h$, c) $f_3(x) := x^x$ für $x > 0$,
d) $f_4 := \log_2(g)$, e) $f_5 := (1/f) \circ h$,

wobei $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktionen sind.

Aufgabe 32

(10 Punkte)

Skizzieren Sie die Funktionen $g_0, g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_n(x) := \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow 0} g_0$ nicht existiert. Also ist g_0 in 0 nicht stetig.
b) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow 0} g_1 = 0$. Also ist g_1 in 0 stetig.
c) Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass g_1 in 0 nicht differenzierbar ist.
d) Ist die Funktion g_2 differenzierbar an der Stelle Null? Belegen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 33

(10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen von

- a) $\sinh x$ b) $\cosh x$ c) $\operatorname{arccot} x$

um $x_0 = 0$. Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

HINWEIS: Denken Sie bei c) an die Herleitung der Taylorreihe von \log in der Vorlesung!

Aufgabe 34

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

- a) $\frac{1}{3 + 2x^3}$ um Null, b) $\frac{1}{x - 5}$ um Null,
c) $\frac{1}{1 + x}$ um $x_0 = 7$, d) $\frac{1}{(1 + x)^2}$ um Null

und geben Sie an, für welche x die Reihen konvergieren.

Aufgabe 35

(10 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^6(x)}{2x^2(e^x - 1)^4}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\log x)}{\sqrt{x}}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)^5}{x^{13} - 5x^{10}}$