

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 10.12.2010)

Aufgabe 41

(10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K ?

- a) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{Q}$, b) $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{R}$,
c) $M = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ d) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{C}$
e) $M = \{ \text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \leq 3$
 und Steigung Eins im Ursprung $\}$, $K = \mathbb{R}$
f) $M = \{ \text{Polynome } f(x) \text{ mit reellen Koeffizienten vom Grad } \leq 7$
 und $f(3) = 0$ und $f'(3) = 0. \}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 42

(10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 linear abhängig?

- a) $\begin{pmatrix} -64 \\ -1 \\ \beta^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}$.

Aufgabe 43

(10 Punkte)

Zeigen Sie:

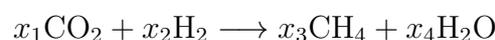
- a) Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, bilden einen Vektorraum über den reellen Zahlen.
b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \sin(2x)$ sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.
c) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2(x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.

HINWEIS: Nehmen Sie bei b) an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!

Aufgabe 44

(10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j nichtnegative ganze Zahlen sind.