Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 10/11
Sebastian Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 10.12.2010)

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K?

a) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{Q}$, b) $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{R}$,

c) $M = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ d) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{C}$

e) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 3 und Steigung Eins im Ursprung $\}$, $K = \mathbb{R}$

f) $M = \{$Polynome $f(x)$ mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 7 und $f(3) = 0$ und $f'(3) = 0.$ $\}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} -64 \\ -1 \\ \beta^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3\beta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}.$

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, bilden einen Vektorraum über den reellen Zahlen.

b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \sin(2x)$ sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

c) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2(x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.

Hinweis: Nehmen Sie bei b) an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen

$$x_1\mathrm{CO_2} + x_2\mathrm{H_2} \longrightarrow x_3\mathrm{CH_4} + x_4\mathrm{H_2O}$$

$$y_1\mathrm{H(CH_2)}_n\mathrm{CH_2OH} + y_2\mathrm{O_2} \longrightarrow y_3\mathrm{CO_2} + y_4\mathrm{H_2O}$$

(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahle von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j nichtnegative ganze Zahlen sind.