

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 13 (Abgabe am 28.01.2011)

Aufgabe 60

(10 Zusatzpunkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix gemäß

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \dots$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Weiter definieren wir die Matrixexponentialfunktion durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $\exp(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$. Berechnen Sie $\exp \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

HINWEIS: Aus der Matrixaddition (komponentenweise) folgt natürlich

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 61

(10 Zusatzpunkte)

Seien z_1, z_2, z_3 die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = -4, \quad z_2 = 9i, \quad z_3 = 1 + i.$$

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase von:

$$\text{a) } z_1 \quad \text{b) } z_2 \quad \text{c) } z_3 \quad \text{d) } z_1 \cdot z_3 \quad \text{e) } z_2 \cdot z_3 \quad \text{f) } z_2/z_3.$$

Aufgabe 62

(10 Zusatzpunkte)

- Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $z^5 = 32i$. Markieren Sie diese z in einer Skizze der komplexen Ebene.
- Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

$$\sum_{\nu=0}^n \cos(\nu x).$$

Aufgabe 63

(10 Zusatzpunkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & i \\ 1 & -1 & i & -i \\ i & i & 1 & 1 \\ i & -i & 1 & i \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A$, $\det(\overline{A^T})$ und $\det(\overline{A^T}A)$.