Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Wintersemester 10/11

Sebastian Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Klausur am 03.02.2011

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg! Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 106 Punkte erreichbar, 74 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 37 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+6 = 9 Punkte)

Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall\ n \geq 2$. Sei weiter

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 und a_7.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_{n+1} \end{pmatrix} \qquad \forall\ n \geq 1 .$$

Aufgabe 2 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2n+1} (x^{\nu})^{\frac{3}{2}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} 3^{(l+1)}\binom{l}{k}$ d) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{n+1}\sum_{\lambda=\mu}^{n+1} \frac{2}{\lambda+1}$

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3n} - \sqrt{n^2+5n}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 - 7n^2 + (-1)^n n}{3n^5 - 8n^3 + 2}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{4-n}\right)^{\frac{n}{3}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3(x)}{3x^5 - 3x^3}$

Aufgabe 4 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen und geben Sie an, wo diese konvergieren,

a) $\sin(x^3)$ um $x = 0$, b) $\dfrac{1+2x}{1-x}$ um $x = 0$,

c) $\dfrac{1}{1-x}$ um $x = 4$, d) $\dfrac{1}{(1-x)(1+2x)}$ um $x = 0$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Sei $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$. Bestimmen Sie $f^{(2011)}(0)$, d.h. die 2011. Ableitung an der Stelle Null.

Aufgabe 6 (2+4+4+2+4 = 16 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + \frac{1}{2} - x|x|}{2x}$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie alle Hoch- und Tiefpunkte.
d) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
e) Geben Sie möglichst große $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $1 \in A$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie $f^{-1\prime}(2)$.

Aufgabe 7 (5+2+3 = 10 Punkte)
Zeigen Sie: $(\mathrm{O}(n), \cdot)$ mit

$$\mathrm{O}(n) := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I \right\}$$

und dem Matrixprodukt $\cdot$ ist eine Gruppe, d.h.

a) $A, B \in \mathrm{O}(n) \;\Rightarrow\; A \cdot B \in \mathrm{O}(n)$,
b) $\mathrm{O}(n)$ enthält ein neutrales Element,
c) $A \in \mathrm{O}(n) \;\Rightarrow\; A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$.

Aufgabe 8 (4+2 = 6 Punkte)

Sei $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \alpha \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$

a) Berechnen Sie $\det A$.
b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine Inverse?

Aufgabe 9 (6+2 = 8 Punkte)
Berechnen Sie A^{-1} und bestimmen Sie die Lösung X von $AX = B$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10 (7 Punkte)
Beschreiben die beiden folgenden Mengen dieselbe Ebene? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$E_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \;,\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \;,\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Hinweis: Berechnen Sie die Hessesche Normalform.