Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 10/11
Sebastian Debreli-Bölzle, Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 5.4.2011

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 110 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Zeigen Sie: Addiert man die ersten n ungeraden Zahlen, so ergibt sich stets eine Quadratzahl.

Hinweise: Überlegen Sie zunächst, welche Quadratzahl sich ergibt.
Formulieren Sie Ihre Vermutung als Gleichung.
Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 2 (3+4+4+4 = 15 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis darf kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{136} 2^\nu$ b) $\displaystyle\sum_{\nu=-1}^{n} x^{-3\nu},\ x \in \mathbb{R}$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=\nu}^{n}\binom{\mu}{\nu} 3^\nu$ d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{k+1} 2^{-k}(-1)^\nu$

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3+3 = 18 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie ggf., warum sie nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x^2)}{\sqrt{|x|}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos^2(x^2)}{\sqrt{|x|}}$ c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-n^3}-\sqrt{n^4+n^3}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{2(x-\pi)^2}{\sin^2(x)}$ e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4x}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}-3}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{e^x+e^{x/2}}-\sqrt{e^x-e^{x/2}}\right)$

Hinweis: $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$.

Aufgabe 4 (2+2+3+3 = 10 Punkte)

Sei

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \qquad \text{und} \qquad h(x) = \log\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x\right].$$

a) Berechnen Sie $h(0)$ und $h(1)$.
b) Bestimmen Sie $g'(x)$.
c) Bestimmen Sie $h'(x)$.
d) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{h(x)}{1-x}$.

Aufgabe 5 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

a) $\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$ b) $\frac{1}{2+x}\cdot\frac{1}{x-1}$ c) $\frac{e^{-x^3}-1}{x^3}$ (stetig fortgesetzt bei $x=0$)

Aufgabe 6 (1+2+5+2+4 = 14 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = (3x - \frac{1}{x})\,e^{-x^2}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie alle Hoch- und Tiefpunkte.
d) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
e) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $2 \in B$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie $f^{-1\prime}(0)$.

Aufgabe 7 (2+4+4 = 10 Punkte)

Sei $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $\circ : G \times G \to G$ definiert durch $x \circ y = x + y + xy$.
$(G, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe.

a) Bestimmen Sie das neutrale Element dieser Gruppe.
b) Sei $x \in G$. Berechnen Sie das Inverse von x.
c) Zeigen Sie: Aus $x, y \in G$ folgt tatsächlich auch $x \circ y \in G$.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Für welche Werte von c sind die folgenden vier Vektoren linear unabhängig?

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\c\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\c\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\c\end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9 (3+6 = 9 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Inverse von A.
b) Zeigen Sie:

$$A^n = \begin{pmatrix}1&2n&0\\0&1&0\\n&n^2&1\end{pmatrix} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Die Ebene E enthalte die drei Punkte

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Abstand von E zum Ursprung.