C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2010/11
13. Oktober 2010

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

a) Zeige, dass durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$1 \leq p < \infty$, eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

b) Weiter setzen wir

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Zeige die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ für $1 \leq p, q \leq \infty$.

Aufgabe 2:

a) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton. Zeige, dass durch $g(x, y) := |g(x) - g(y)|$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

b) Zeige induktiv für je zwei Punkte (x, y) und beliebige Zwischenpunkte, dass

$$d(x, y) \leq d(x, c_1) + d(c_1, c_2) + ... + d(c_n, y).$$

Aufgabe 3: Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Zeige, dass folgende Definition einer konvergenten Folge äquivalent ist zur Definition wie sie in der Vorlesung gegeben wurde:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N : \; d(x_n, a) < \epsilon.$$

b) Beweise die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Aufgabe 4:

a) Zeige für $q \leq p$

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q.$$

b) Zeige

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Besprechung: Mittwoch, 20.10.2010, bzw. Donnerstag 21.10.2010.